

ĐỀ KIỂM TRA HỌC KỲ 2 NĂM HỌC 2012 – 2013

Môn: Toán – Lớp: 11

Ban: Khoa học tự nhiên

Thời gian làm bài: 90 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1 (1,5 điểm)

a) Cho cấp số cộng (u_n) có $u_{31} + u_{34} = 11$ và $(u_{31})^2 + (u_{34})^2 = 101$ đồng thời công sai d là số dương. Tính tổng của 2013 số hạng đầu tiên của cấp số đó.

b) Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn (a_n) bằng 64. Tìm công thức tính số hạng tổng quát a_n theo n , biết tổng của sáu số hạng đầu của (a_n) bằng 63 và công bội q là số âm.

Câu 2 (2 điểm) Cho hàm $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos 2x}{1 - \sqrt{2x^2 + 1}}, & x < 0 \\ m, & x = 0, \text{ (} m \text{ là tham số thực).} \\ x \sin \frac{1}{x} - 2, & x > 0 \end{cases}$

a) Tính $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

b) Hàm f có liên tục trên \mathbb{R} không?

Câu 3 (3 điểm)

a) Tính giá trị biểu thức $F = f'(\frac{\pi}{2}) + f''(\frac{\pi}{2})$, với $f(x) = x^2 \cos^2 x$.

b) Cho hàm $y = g(x) = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $(\Delta): 2x + y + 2013 = 0$.

i) Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng (Δ) .

ii) Chứng minh rằng trên (C) không có điểm nào mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng (Δ) .

Câu 4 (3,5 điểm) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O cạnh bằng a , mặt bên hợp với mặt đáy một góc 60° . Gọi M là trung điểm của cạnh CD .

a) Chứng minh $mp(SCD)$ vuông góc với $mp(SOM)$.

b) Tính khoảng cách từ O đến $mp(SCD)$.

c) Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung giữa hai đường thẳng BD và SC .

..... HẾT

Học sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

HƯỚNG DẪN CHẤM
(Hướng dẫn này có 04 trang)

Chú ý: 1) Nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án nhưng đúng thì cho đủ số điểm từng phần như thang điểm quy định

2) Sau khi cộng điểm toàn bài, làm tròn đến 0,5 điểm (lẻ 0,25 làm tròn thành 0,5; lẻ 0,75 làm tròn thành 1,0 điểm)

ĐÁP ÁN – THANG ĐIỂM

Câu	Đáp án	Điểm
Câu 1 (1,5 điểm)	a) (0,75 điểm) $\begin{cases} u_{31} + u_{34} = 11 \\ (u_{31})^2 + (u_{34})^2 = 101 \Rightarrow S_{2013} = ? \\ d > 0 \end{cases}$	
	Theo đề bài $\begin{cases} (u_{31})^2 + (u_{34})^2 = 101 \\ u_{31} + u_{34} = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u_{31} + u_{34})^2 - 2u_{31}u_{34} = 101 \\ u_{31} + u_{34} = 11 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} u_{31}u_{34} = 10 \\ u_{31} + u_{34} = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_{31} = 10 \\ u_{34} = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} u_{31} = 1 \\ u_{34} = 10 \end{cases}$	
	Mặt khác $d > 0$ nên $u_{31} < u_{34}$, do đó $\begin{cases} u_{31} = 1 \\ u_{34} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -89 \\ d = 3 \end{cases}$	0,25
	Vậy $S_{2013} = \frac{2013}{2}(2u_1 + 2012d) = 5896077$	0,25
	b) (0,75 điểm) $\begin{cases} S = 64 \\ S_6 = 63 \Rightarrow u_n = ? \\ -1 < q < 0 \end{cases}$	
	Theo giả thiết $\begin{cases} \frac{a_1}{1-q} = 64 \\ \frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = 63 \\ -1 < q < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 64(1-q) \\ q^6 = \frac{1}{64} \\ -1 < q < 0 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 96 \\ q = -\frac{1}{2} \end{cases}$	0,25
Vậy $a_n = 96 \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}, n \in \mathbb{N}^*$	0,25	
Câu 2 (2 điểm)	a) (1 điểm) Tính $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$	
	+ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x \sin \frac{1}{x} - 2\right)$	0,25
	$= -2$ (vì $\left x \sin \frac{1}{x}\right \leq x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$)	0,25

	$+ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos 2x}{1 - \sqrt{2x^2 + 1}}$	0,25
	$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[-\left(1 + \sqrt{2x^2 + 1}\right) \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \right] = -2$	0,25
	b) (1 điểm) f có liên tục trên \mathbb{R} không?	
	Với $x \in (-\infty; 0)$, $f(x) = \frac{1 - \cos 2x}{1 - \sqrt{2x^2 + 1}}$ liên tục	0,25
	Với $x \in (0; +\infty)$, $f(x) = x \sin \frac{1}{x} - 2$ liên tục	0,25
	Theo câu (a), $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -2$. Do đó, + Nếu $m = -2$ thì f liên tục trên \mathbb{R}	0,25
	+ Nếu $m \neq -2$ thì f không liên tục trên \mathbb{R}	0,25
	a) (1 điểm) $f(x) = x^2 \cos^2 x \Rightarrow F = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) + f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = ?$	
	Ta có $f'(x) = 2x \cos^2 x - x^2 \sin 2x$	0,25
	$f''(x) = 2 \cos^2 x - 4x \sin 2x - 2x^2 \cos 2x$	0,25
	$\Rightarrow \begin{cases} f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{2} \end{cases}$	0,25
	Vậy $F = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) + f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{2}$	0,25
	b) (2 điểm) (C): $y = g(x) = \frac{x+1}{x-1}$ và (Δ): $2x + y + 2013 = 0$	
	Tập xác định của hàm g là $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$	
	Ta có $g'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$	0,25
	Hệ số góc của Δ là $k = -2$	0,25
	i) (0,75 điểm) Tiếp tuyến song song với Δ	
	Gọi $M_0(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến (d) cần tìm.	0,25
	Vì (d) song song với (Δ) nên $g'(x_0) = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(0) = -1 \\ g(2) = 3 \end{cases}$	0,25
	Vậy có hai tiếp tuyến thỏa yêu cầu là: $(d_1): y = -2x - 1$ và $(d_2): y = -2x + 7$	0,25
	ii) (0,75 điểm) Chứng minh rằng ...	
	Với mọi điểm $M(x; y)$ nằm trên đồ thị (C), giả sử tại M có tiếp tuyến với (C) vuông góc với Δ .	0,25
	Khi đó, phương trình $-2 \cdot g'(x) = -1$ có nghiệm $\Leftrightarrow \frac{4}{(x-1)^2} = -1$ có nghiệm (vô lý)	0,25
	Vậy trên (C) không có điểm nào mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng (Δ).	0,25

Câu 3
(3 điểm)

<p>Câu 4 (3,5 điểm)</p>		<p>0,5</p>
	<p>Chú ý : Hình đúng nhưng không thể hiện góc 60° được 0,25 điểm</p>	
	<p>a) (1 điểm) Chứng minh $mp(SCD)$ vuông góc với $mp(SOM)$.</p>	
	<p>Vì $ABCD$ là hình vuông, M là trung điểm CD nên $CD \perp OM$</p>	<p>0,25</p>
	<p>Theo đề bài, $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SC = SD$, mà M là trung điểm CD suy ra $CD \perp SM$</p>	<p>0,25</p>
	<p>Do đó, $CD \perp (SOM)$</p>	<p>0,25</p>
	<p>Mặt khác, $CD \subset (SCD)$ nên $(SCD) \perp (SOM)$</p>	<p>0,25</p>
	<p>b) (1 điểm) Tính $d(O, (SCD))$</p>	
	<p>Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên SM. Theo (1), $CD \perp (SOM)$ $OH \subset (SOM)$ } $\Rightarrow OH \perp CD$</p>	<p>0,25</p>
<p>Do đó, $OH \perp (SCD) \Rightarrow d(O, (SCD)) = OH$</p>	<p>0,25</p>	
<p>Tam giác OHM vuông tại H $\Rightarrow OH = OM \sin \widehat{SMO} = \frac{BC}{2} \sin \widehat{SMO} = \frac{a}{2} \sin \widehat{SMO}$</p>	<p>0,25</p>	
<p>Theo (1), $\left\{ \begin{array}{l} SM \perp CD \\ OM \perp CD \end{array} \right\} \Rightarrow ((SCD), (ABCD)) = (SM, OM) = \widehat{SMO}$ $(SCD) \cap (ABCD) = CD$ $\Rightarrow \widehat{SMO} = 60^\circ$</p>	<p>0,25</p>	
<p>Vậy $d(O, (SCD)) = OH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.</p>		
<p>c) (1 điểm) Xác định đoạn vuông góc chung của BD và SC</p>		
<p>Gọi K là hình chiếu của O lên SC. Theo (1), $CD \perp (SOM)$ nên $SO \perp CD$. Lập luận tương tự, $SO \perp DA$. Do đó, $SO \perp (ABCD)$</p>	<p>0,25</p>	

	$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow BD \perp SO \\ BD \perp AC \end{array} \right\} \Rightarrow BD \perp (SAC) \left. \begin{array}{l} \Rightarrow OK \perp BD \\ OK \subset (SAC) \\ OK \perp SC \end{array} \right\} \Rightarrow OK \text{ là đoạn vuông góc}$	0,25
	<p>chung của BD và SC.</p> <p>Tam giác SOC vuông tại O có OK là đường cao nên</p> $\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OS^2} \Leftrightarrow OK = \frac{SO \cdot OC}{\sqrt{SO^2 + OC^2}} = \frac{SO \cdot \frac{AC}{2}}{\sqrt{SO^2 + \left(\frac{AC}{2}\right)^2}}$ $\Leftrightarrow OK = \frac{SO \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{SO^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}}$	0,25
	<p>Tam giác SOM vuông tại $O \Rightarrow SO = OM \tan \widehat{SMO} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.</p> <p>Vậy $OK = \frac{a\sqrt{30}}{10}$</p>	0,25