TÓM TẮT CÔNG THỨC TOÁN CẤP 3

A. ĐẠI SỐ.

1. Tam thức bậc hai.

Giả sử $f(x)=ax^2+bx+c\left(a\neq 0;\ \sim,\quad \in\mathbb{R};\ \sim<\quad ;\ S=-\dfrac{b}{a}\right)$

$f(x)\geq 0\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta\leq 0\end{cases}$	$\left[\begin{array}{l}x_1<x_2<\sim\\ \sim<x_1<x_2\end{array}\right.\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\ af(\sim)>0\end{cases}$
$f(x)\leq 0\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\ \Delta\leq 0\end{cases}$	$x_1<\sim<\quad<x_2\Leftrightarrow\begin{cases}af(\sim)<0\\ af(\quad)<0\end{cases}$
$\sim$ là nghiệm của $f(x)\Leftrightarrow f(\sim)=0$	$x_1<\sim<x_2<\quad\Leftrightarrow\begin{cases}af(\sim)<0\\ af(\quad)>0\end{cases}$
$x_1<\sim<x_2\Leftrightarrow af(\sim)<0$	$\sim<x_1<\quad<x_2\Leftrightarrow\begin{cases}af(\sim)>0\\ af(\quad)<0\end{cases}$
$\sim<x_1<x_2\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\ af(\sim)>0\\ \dfrac{S}{2}-\sim>0\end{cases}$	$\left[\begin{array}{l}\sim<x_1<\quad<x_2\\ x_1<\sim<x_2<\end{array}\right.\Leftrightarrow f(\sim).f(\quad)<0$
$x_1<x_2<\sim\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\ af(\sim)>0\\ \dfrac{S}{2}-\sim<0\end{cases}$	$\sim<x_1<x_2<\quad\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\ af(\sim)>0\\ af(\quad)>0\\ \dfrac{S}{2}-\sim>0\\ \dfrac{S}{2}-\quad<0\end{cases}$

2. Bất đẳng thức Cô si:

Với hai số $a\geq 0, b\geq 0$ thì $\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$. Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow a=b$

3. Phương trình – bất phương trình chứa trị tuyệt đối

$\|A\| = \|B\| \Leftrightarrow A = \pm B$	$\|A\| < \|B\| \Leftrightarrow A^2 < B^2$
$\|A\| = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \ge 0 \\ A = B^2 \end{cases}$	$\|A\| > B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A > B \\ A < -B \end{array}\right.$
$\|A\| < B \Leftrightarrow -B < A < B$	

4. *Phương trình – bất phương trình chứa căn*

$\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \ge 0\ (B \ge 0) \\ A = B \end{cases}$	$\sqrt{A} < B \Leftrightarrow \begin{cases} A \ge 0 \\ B > 0 \\ A < B^2 \end{cases}$
$\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \ge 0 \\ A = B^2 \end{cases}$	$\sqrt{A} > B \Leftrightarrow \begin{cases} B < 0 \\ A \ge 0 \end{cases} \vee \begin{cases} B \ge 0 \\ A > B^2 \end{cases}$
$\sqrt{A} < \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \ge 0 \\ A < B \end{cases}$	

B. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC THƯỜNG.

1. Định lý hàm số Cosin:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

2. Định lý hàm số Sin:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

3. Công thức tính diện tích tam giac:

$S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$	$S=\frac{abc}{4R}$
$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A$	$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
$S=p.r$	

C. HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ.

I. PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để giải một hệ phương trình đại số ta thường dùng phương pháp cộng hay phương pháp thế. Bên cạnh đó ta còn có một số loại hệ phương trình đặc biệt.

II. MỘT SỐ HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẶC BIỆT.

1. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

- **Dạng:** $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ (*)
- **Cách giải:** Công thức Crammer

  Đặt $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$; $D_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$; $D_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

  - Nếu $D\neq 0$: hệ (*) có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x=\dfrac{D_x}{D} \\ y=\dfrac{D_y}{D} \end{cases}$

  - Nếu $D=0$ và $D_x\neq 0$ hay $D_y\neq 0$: hệ (*) vô nghiệm.

  - Nếu $D=D_x=D_y=0$: hệ (*) có hai trường hợp xảy ra: hoặc vô nghiệm hoặc vô số nghiệm.

2. HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG LOẠI MỘT.

- **Dạng:** $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$ (*) trong đó khi hoán vị vai trò của x và y cho nhau, từng phương trình của hệ không thay đổi.
- **Cách giải:**

  Đặt $S=x+y;P=xy$

  Giải tìm S, P. Suy ra x, y là nghiệm của phương trình $X^2-SX+P=0$

  Điều kiện để phương trình trên có nghiệm là $\Delta=S^2-4P\geq 0$

3. HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG LOẠI HAI.

- **Dạng:** $\begin{cases} f(x,y)=0 & (1) \\ f(y,x)=0 & (2) \end{cases}$ (*) trong đó khi hoán vị vai trò của x và y cho nhau,thì phương trình (1) trở thành phương trình (2) và ngược lại.
- **Cách giải:** Có 2 cách

  Cách 1: $\begin{cases} f(x,y)-f(y,x)=0 \\ f(y,x)=0 \end{cases}$

  Cách 2: $\begin{cases} f(x,y)-f(y,x)=0 \\ f(x,y)+f(y,x)=0 \end{cases}$

4. HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẲNG CẤP .

- **Dạng:** Hệ phương trình đẳng cấp là hệ phương trình mà cấp của tất cả đơn thức trong hệ đều bằng nhau.
- **Cách giải:**

  \- Xét $x=0$, thế vào hệ tìm y.

  \- Xét $x \neq 0$, đặt $y=tx$, thế vào hệ tìm t, sau đó suy ra x và y.

D. LƯỢNG GIÁC.

I. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC.

1. Các cung liên quan đặc biệt

1.1 Hai cung đối nhau: ($\sim$ và - $\sim$) $\cos(-\sim)=\cos\sim$ $\sin(-\sim)=-\sin\sim$ $\tan(-\sim)=-\tan\sim$ $\cot(-\sim)=-\cot\sim$	*1.3 Hai cung phụ nhau: ($\sim$ và $\frac{®}{2}-\sim$)* $\sin\left(\frac{®}{2}-\sim\right)=\cos\sim$ $\cos\left(\frac{®}{2}-\sim\right)=\sin\sim$ $\tan\left(\frac{®}{2}-\sim\right)=\cot\sim$ $\cot\left(\frac{®}{2}-\sim\right)=\tan\sim$
1.2 Hai cung bù nhau: ($\sim$ và $® - \sim$) $\sin(®-\sim)=\sin\sim$ $\cos(®-\sim)=-\cos\sim$ $\tan(®-\sim)=-\tan\sim$ $\cot(®-\sim)=-\cot\sim$	*1.4 Hai cung hơn, kém ® : ($\sim$ và $®+\sim$)* $\sin(®+\sim)=-\sin\sim$ $\cos(®+\sim)=-\cos\sim$ $\tan(®+\sim)=\tan\sim$ $\cot(®+\sim)=\cot\sim$ **1.5** *Cung hơn kém $\frac{®}{2}$:* $\cos\left(\frac{®}{2}+x\right)=-\sin x$; $\sin\left(\frac{®}{2}+x\right)=\cos x$;

Ghi nhớ: *' cos đối; sin bù; phụ chéo; hơn, kém ® tan, cot '.*

2. Các công thức lượng giác cơ bản

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
- $\dfrac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$
- $\tan x.\cot x = 1$
- $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$
- $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

3. Công thức cộng

$$\sin(a \pm b) = \sin a.\cos b \pm \cos a.\sin b$$
$$\cos(a \pm b) = \cos a.\cos b \mp \sin a.\sin b$$
$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a.\tan b}$$

4. Công thức nhân

4.1 Công thức nhân đôi

$$\sin 2a = 2\sin a \cos a$$
$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$
$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

4.2 Công thức nhân ba

$$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$$
$$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$$
$$\tan 3a = \frac{3\tan a - \tan^3 a}{1 - 3\tan^2 a}$$

5. Công thức hạ bậc

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} \qquad \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$
$$\sin^3 a = \frac{3\sin a - \sin 3a}{4} \qquad \cos^3 a = \frac{3\cos a + \cos 3a}{4}$$

6. Công thức biến đổi tổng thành tích

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$
$$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$
$$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$
$$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$

7. Công thức biến đổi tích thành tổng

$$\cos a.\cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]$$

$$\sin a.\sin b = -\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)-\cos(a-b)\right]$$

$$\sin a.\cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$$

II. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

DẠNG 1. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

Kiến thức cơ bản

$$\sin u = \sin v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v + k2® \\ u = ® - v + k2® \end{array}\right.$$

$$\cos u = \cos v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v + k2® \\ u = -v + k2® \end{array}\right.$$

$$\tan u = \tan v \Leftrightarrow u = v + k2®$$

$$\cot u = \cot v \Leftrightarrow u = v + k2®$$

Trường hợp đặc biệt:

$$\sin u = 0 \Leftrightarrow u = k®$$

$$\sin u = 1 \Leftrightarrow u = \frac{®}{2} + k2®$$

$$\sin u = -1 \Leftrightarrow u = -\frac{®}{2} + k2®$$

$$\cos u = 0 \Leftrightarrow u = \frac{®}{2} + k®$$

$$\cos u = 1 \Leftrightarrow u = k2®$$

$$\cos u = -1 \Leftrightarrow u = ® + k2®$$

DẠNG 2. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI ĐỐI VỚI MỘT HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Kiến thức cơ bản

- Phương trình bậc hai theo một hàm số lượng giác là phương trình có dạng:
  $at^2 + bt + c = 0$ **(1)** trong đó **t** là một trong các hàm số: **sinu; cosu; tanu; cotu**.
- Cách giải: Đặt **t = sinu; cosu; tanu; cotu.**
  Chú ý: $|\sin u|;|\cos u| \le 1$

DẠNG 3. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT THEO SINu VÀ COSu

Kiến thức cơ bản

Dạng : $a\sin u + b\cos u = c$ (1) trong ño $a^2 + b^2 \ne 0$

Điều kiện có nghiệm: $a^2 + b^2 \ge c^2$

Cach giai:

Chia hai vế của PT cho $\sqrt{a^2+b^2}$,

(1) $\Leftrightarrow \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin u + \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos u = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\Leftrightarrow \sin u.\cos\sim + \cos u.\sin\sim = \sin$

$\Leftrightarrow \sin(u+\sim) = \sin$

DẠNG 4. PHƯƠNG TRÌNH THUẦN NHẤT BẬC HAI THEO SINU VÀ COSU

Kiến thức cơ bản

Dạng tổng quát:

$$\boxed{a\sin^2 u + b\sin u\cos u + c\cos^2 u = d \quad \textbf{(2)}}$$

Cách giải:

B$_1$: Xét $\cos u = 0$. Kiểm tra $u = \dfrac{\circledR}{2} + k\circledR$ có thỏa phương trình (2) không ?

B$_2$: Xét $\cos u \neq 0$. Chia 2 vế phương trình (2) cho $\cos^2 u$. Ta được phương trình mới dạng: $a\tan^2 u + b\tan u + c = 0$.

***Chú ý:** Nếu phương trình lượng giác có bậc cùng chẵn hoặc cùng lẻ theo sinu và cosu thì ta cũng giải bằng phương pháp trên.

DẠNG 5. PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG – PHẢN XỨNG

Dạng tổng quát:

$$\boxed{a(\sin u \pm \cos u) + b\sin u\cos u + c = 0 \quad \textbf{(3)}}$$

Cách giải:

Đặt $t = \sin x \pm \cos x = \sqrt{2}\sin(x \pm \dfrac{\circledR}{4})$ (*) (Điều kiện: $|t| \le \sqrt{2}$)

$\Rightarrow \sin x\cos x = \pm\dfrac{t^2-1}{2}$.

Thế vào **(3)** ta được phương trình bậc hai theo t.

Một số công thức quan trọng

- $\sin u + \cos u = \sqrt{2}\sin\left(u+\dfrac{\circledR}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(u-\dfrac{\circledR}{4}\right)$
- $\sin u - \cos u = \sqrt{2}\sin\left(u-\dfrac{\circledR}{4}\right) = -\sqrt{2}\cos\left(u+\dfrac{\circledR}{4}\right)$
- $1 \pm \sin 2x = (\sin x \pm \cos x)^2$

E. CÔNG THỨC ĐẠO HÀM.

1. Quy tắc cơ bản.

$(c)' = 0$ $\quad$ $(u \pm v)' = u' \pm v'$

$(u.v)' = u'v + v'u$ $\quad$ $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$

2. Bảng công thức tính đạo hàm.

$(k.x)' = k$	$(k.u)' = k.u'$
$(x^n)' = n.x^{n-1}$	$(u^n)' = n.u^{n-1}.(u)'$
$(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$	$(\frac{1}{u})' = -\frac{(u)'}{u^2}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = \cos u.(u)'$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -\sin u.(u)'$
$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)' = (1 + \tan^2 u).u' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$(\cot x)' = -(1 + \cot^2 x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)' = -(1 + \cot^2 u).u' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = e^u.u'$
$(a^x)' = a^x.\ln a$	$(a^u)' = a^u.\ln a.u'$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x.\ln a}$	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u.\ln a}$

*__Đặc biệt__ :

- $$y = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow y' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$$
- $$y = \frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2} \Rightarrow y' = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} x^2 + 2\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{(a_2x^2 + b_2x + c_2)^2}$$

F. CÔNG THỨC MŨ – LOGARIT.

STT	CÔNG THỨC MŨ
1.	$a^n = \underbrace{a.a...a}_{n \text{ thua so}}$
2.	$a^1 = a \quad \forall a$
3.	$a^0 = 1 \quad \forall a \neq 0$
4.	$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
5.	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
6.	$a^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$
7.	$a^m.a^n = a^{m+n}$
8.	$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
9.	$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m.n}$
10.	$(a.b)^n = a^n.b^n$
11.	$(\dfrac{a}{b})^n = \dfrac{a^n}{b^n}$
12.	$a^M = N \Leftrightarrow M = \log_a N$

STT	CÔNG THỨC LOGARIT
1	$\log_a 1 = 0$
2	$\log_a a = 1$
3	$\log_a a^M = M$
4	$a^{\log_a N} = N$
5	$\log_a(N_1.N_2) = \log_a N_1 + \log_a N_2$
6	$\log_a(\dfrac{N_1}{N_2}) = \log_a N_1 - \log_a N_2$
7	$\log_a N^{\sim} = \sim.\log_a N$
8	$\log_a N^2 = 2.\log_a \lvert N \rvert$
9	$\log_a N = \log_a b.\log_b N$
10	$\log_b N = \dfrac{\log_a N}{\log_a b}$
11	$\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$
12	$\log_{a^{\sim}} N = \dfrac{1}{\sim}\log_a N$
13	$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

G. CÔNG THỨC NGUYÊN HÀM.

Nguyên hàm của những hàm số thường gặp	Nguyên hàm của những hàm số thường gặp
1. $\int dx = x + C$ 2. $\int k dx = kx + C$ 3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$ 4. $\int \frac{1}{x} dx = \ln\|x\| + C \quad (x \neq 0)$ 5. $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$ 6. $\int \frac{1}{x^n} dx = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C$ 7. $\int e^x dx = e^x + C$ 8. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$ 9. $\int \cos x dx = \sin x + C$ 10. $\int \sin x dx = -\cos x + C$ 11. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + C$ 12. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int (1 + \cot^2 x) dx = -\cot x + C$	13. $\int \frac{1}{x^n} dx = -\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{x^{n-1}} + c$ 14. $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + c$ 15. $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$ 16. $\int (ax+b)^{\sim} dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{\sim+1}}{\sim+1} + C \quad (\sim \neq 1)$ 17. $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln\|ax+b\| + C \quad (x \neq 0)$ 18. $\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$ 19. $\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$ 20. $\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$ 21. $\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$ 22. $\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C$

H. PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN.

Cho vectơ $\vec{u}=(x;y;z)$; $\vec{v}=(x';y';z')$

và hai điểm $A(x_A;y_A;z_A)$; $B(x_B;y_B;z_B)$.

1. $\vec{u}\pm\vec{v}=(x\pm x';y\pm y';z\pm z')$
2. $k.\vec{u}=(kx;ky;kz)$
3. Ñieu kien bang nhau cua hai vectô:

   $$\vec{u}=\vec{v}\Leftrightarrow\begin{cases}x=x'\\ y=y'\\ z=z'\end{cases}$$

4. $\vec{u}$ cung phöông $\vec{v}$ $\Leftrightarrow\dfrac{x}{x'}=\dfrac{y}{y'}=\dfrac{z}{z'}$
5. $\vec{u}$ cung phöông $\vec{v}$ $\Leftrightarrow\left[\vec{u},\vec{v}\right]=\vec{0}$
6. **Tích vô hướng của hai vectơ:** $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz'$
7. Ño dai cua mot vectô :

   $|\vec{u}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

8. Vectô tao bôi 2 ñiem A, B:

   $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$

9. Ño dai ñoan thang AB:

   $AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

10. Goc giöa hai vectô :

    $$\cos\varphi=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}=\frac{xx'+yy'+zz'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}.\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}\quad\left(0\le\varphi\le180^0\right)$$

11. Ñieu kien vuong goc cua hai vactô:

    $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}.\vec{v}=0\Leftrightarrow xx'+yy'+zz'=0$

12. M la trung ñiem cua ñoan AB $\Leftrightarrow\begin{cases}x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2}\\ y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2}\\ z_M=\dfrac{z_A+z_B}{2}\end{cases}$

13. G la trong tam tam giac ABC $\Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C) \\ y_G = \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C) \\ z_G = \frac{1}{3}(z_A + z_B + z_C) \end{cases}$

14. G la trong tam tö dien ABCD $\Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{1}{4}(x_A + x_B + x_C + x_D) \\ y_G = \frac{1}{4}(y_A + y_B + y_C + y_D) \\ z_G = \frac{1}{4}(z_A + z_B + z_C + z_D) \end{cases}$

15. Tích CO HÖÔNG cua hai vectô:

$$[\vec{u},\vec{v}] = \left(\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} z & x \\ z' & x' \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \right)$$

16. Tính chat quan trong :

$[\vec{u},\vec{v}] \perp \vec{u}$ va $[\vec{u},\vec{v}] \perp \vec{v}$

17. Dien tích tam giac ABC : $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left| \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right] \right|$

18. Dien tích hình bình hanh ABCD: $S_{hbh\,ABCD} = 2S_{\Delta ABC} = \left| \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right] \right|$

19. The tích tö dien ABCD : $V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left| \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right] . \overrightarrow{AD} \right|$

20. Chieu cao AH cua tö dien ABCD: $AH = \frac{3.V_{ABCD}}{S_{\Delta BCD}}$

21. The tích khoi hop ABCD.A'B'C'D' : $V = \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}].\overrightarrow{AA'} \right|$

22. Ba ñiem A,B,C tao thanh tam giac $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ khong cung phöông

23. Bon ñiem A,B,C,D không ñong phang $\Leftrightarrow$ ABCD la tö dien $\Leftrightarrow$ $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right] . \overrightarrow{AD} \neq 0$

24. Điều kiện để ABCD là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

25. Khoang cach tö mot ñiem ñen mot mat phang: $d\left(M,(\sim)\right) = \frac{|Ax_o + By_o + Cz_o + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

26. Khoang cach tö mot ñiem ñen mot ñöông thang: $d(M,?) = \frac{\left| \left[\overrightarrow{M_0M}, \vec{a} \right] \right|}{|\vec{a}|}$

27. Khoang cach giöa hai ñöông thang cheo nhau: $d(d,d') = \frac{\left| \left[\vec{a}, \vec{b} \right] . \overrightarrow{MN} \right|}{\left| \left[\vec{a}, \vec{b} \right] \right|}$

28. Goc giöa ñöông thang va mat phang: $\sin \ddot{} = \frac{|\vec{n}.\vec{a}|}{|\vec{n}|.|\vec{a}|}$

I. PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG OXY.

- Diện tích tam giác trong mặt phẳng Oxy:

$$\overrightarrow{AB}=(a_1;a_2),\overrightarrow{AC}=(b_1;b_2)\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|$$

1. ***Đường thẳng.***

a. Các dạng phương trình đường thẳng:

- Phương trình tổng quát: $Ax+By+Cz=0\ \left(A^2+B^2>0\right)$

(Vec tơ pháp tuyến $\vec{n}=(A;\ B)$, Vec tơ chỉ phương $\vec{a}=(B;-A)$ hay $\vec{a}=(-B;A)$)

- Phương trình tham số: $\begin{cases}x=x_0+a_1t\\ y=y_0+a_2t\end{cases}\ (t\in\mathbb{R})$

(Vec tơ chỉ phương $\vec{a}=(a_1;a_2)$ và đi qua điểm $M(x_0,\ y_0)$)

- Phương trình chính tắc: $\dfrac{x-x_0}{a_1}=\dfrac{y-y_0}{a_2}$

- Phương trình đoạn chắn: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$

(Đi qua hai điểm $A(a;\ 0),\ B(0;\ b)$)

b. Góc giữa hai đường thẳng.

Gọi $\vec{n}_1$ *và* $\vec{n}_2$ là hai VTPT của hai đường thẳng Δ_1 *và* Δ_2. Khi đó:

$$\cos(\Delta_1,\Delta_2)=\cos(\vec{n}_1,\vec{n}_2)=\frac{|\vec{n}_1.\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\frac{|a_1a_2+b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}.\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$

c. Khoảng cách từ một điểm $M(x_M;y_M)$ đến một đường thẳng Δ: $Ax+By+C=0$ là:

$$d(M,\Delta)=\frac{|Ax_M+By_M+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

2. ***Đường tròn.***

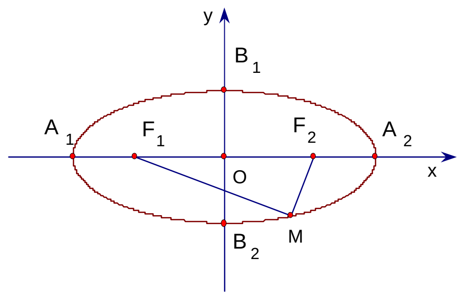
Các dạng phương trình đường tròn:

- **Dạng 1.** Phương trình đường tròn (C) có tâm $I(a;\ b)$ và bán kính R là:

$$(C):(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

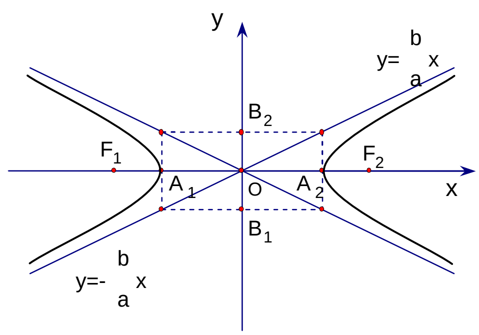
- **Dạng 2.** Phương trình dạng: $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ với điều kiện $a^2+b^2-c>0$ là phương trình đường tròn (C) có tâm $I(a;\ b)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.

3. ***Elip.***



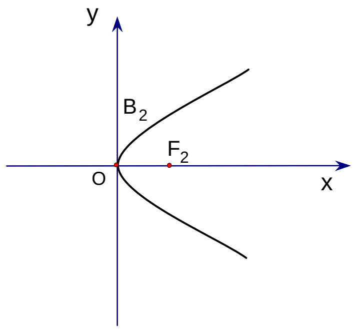
- Phương trình chính tắc của Elip (E): $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b);\ c^2=a^2-b^2$
- Tiêu điểm: $F_1(-c;0),\ F_2(c;0)$
- Đỉnh trục lớn : $A_1(-a;0),\ A_2(a;0)$
- Đỉnh trục bé: $B_1(0;-b),\ B_2(0;b)$
- Tâm sai: $e=\dfrac{c}{a}<1$
- Phương trình đường chuẩn: $x=\pm\dfrac{a}{e}$
- Điều kiện tiếp xúc của (E) và $\Delta: Ax+By+C=0$ là: $A^2a^2+B^2b^2=C^2$

4. ***Hypebol.***



- Phương trình chính tắc: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ \ c^2=a^2+b^2$
- Tiêu điểm $F_1(-c;0),\ F_2(c;0)$
- Đỉnh trên trục thực $A_1(-a;0),\ A_2(a;0)$.
- Tâm sai: $e=\dfrac{c}{a}$
- Phương trình đường chuẩn: $x=\pm\dfrac{a}{e}$
- Điều kiện tiếp xúc của (H) và $\Delta: Ax+By+C=0$ là: $A^2a^2-B^2b^2=C^2$

5. ***Parabol.***



- Phương trình chính tắc: $y^2 = 2px$

-Tiêu điểm $F\left(\frac{p}{2};0\right)$

- Phương trình đường chuẩn $x = -\frac{p}{2}$

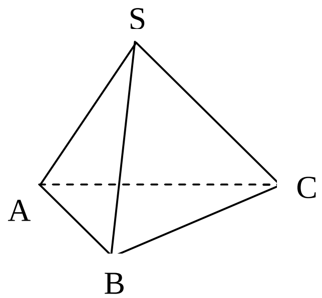
- Điều kiện tiếp xúc của (P) và $\Delta: Ax + By + C = 0$ là: $2AC = B^2p$

J. HÌNH HOC KHONG GIAN.

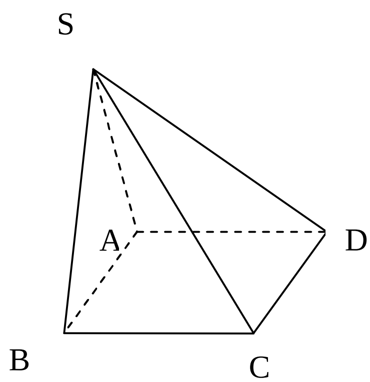
I . CAC HÌNH CÔ BAN

1/ Hình chop

a/ Hình chop thöông:



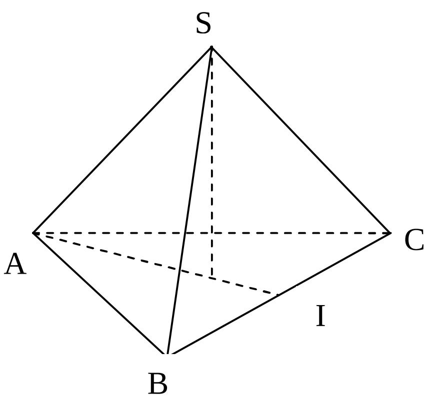
Hình chop tam giac S.ABC
(Töù dien S.ABC)



Hình chop töù giac S.ABCD

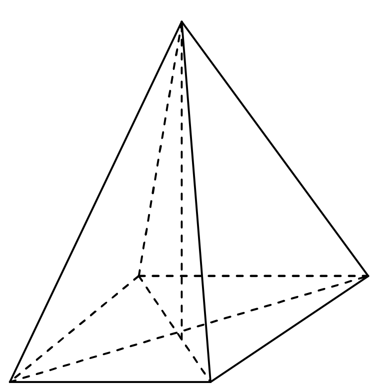
b/ Hình chop ñeu :

* Hình chop tam giac ñeu (Töù dien ñeu)



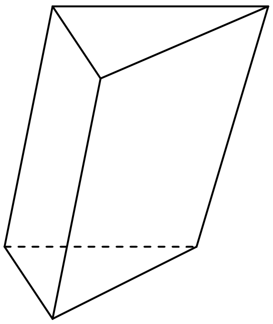
*Tính chat:
-Ñay la tam giac ñeu
-Tat ca cac canh ben bang nhau
-Tat ca cac mat ben la cac tam giac can bang nhau
-Chan ñöông cao trung vôi tam mat ñay (Tam ñay la trong tam Δ ABC)
-Tat ca cac goc tao bôi canh ben va mat ñay ñeu bang nhau
-Tat ca cac goc tao bôi cac mat ben va mat ñay ñeu bang nhau
*Chu y:
-Dien tích Δ ñeu : $S = \dfrac{canh^2 \times \sqrt{3}}{4}$
-Ñöông cao Δ ñeu: $h = \dfrac{canh \times \sqrt{3}}{2}$

* Hình chop töù giac ñeu

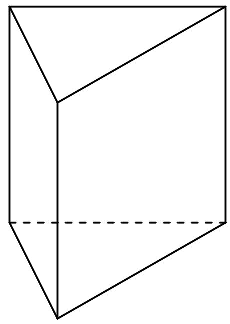


*Tính chat:
-Ñay la hình vuong
-Tat ca cac canh ben bang nhau
-Tat ca cac mat ben la cac tam giac can bang nhau
-Chan ñöông cao trung vôi tam mat ñay (Tam ñay la giao ñiem 2 ñöông cheo)
-Tat ca cac goc tao bôi canh ben va mat ñay ñeu bang nhau
-Tat ca cac goc tao bôi cac mat ben va mat ñay ñeu bang nhau
*Chu y:
-Dien tích hình vuong : S=Canh^2
-Ñöông cheo hình vuong: = canh$\times\sqrt{2}$

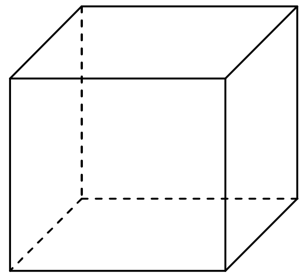
2/ Hình lang tru



Lang tru thöông



Lang tru ñöng



Hình lap phöông

II. CAC PHÖÔNG PHAP CHÖNG MINH

1/ Phöông phap chöng minh ñöông thang vuong goc vôi mat phang

Muon chöng minh ñöông thang d vuong goc vôi mat phang (α), ta lam nhö sau:

*CACH 1: Chöng minh ñöông thang d vuong goc vôi HAI ñöông thang cat nhau nằm trong mp(α)

$$\begin{cases} d \perp a \\ d \perp b \\ a, b \subset (\sim) \end{cases} \Rightarrow d \perp (\sim)$$

*CACH 2: Söû dung ñònh lí:''Neu hai mat phang vuong goc vôi nhau thì bat kì ñöông thang nao nam trong mat phang nay va vuong goc vôi giao tuyen thì cung vuong goc vôi mat phang kia''

$$\begin{cases} (\sim) \perp (\ \ ) \\ d \subset (\sim) \\ c = (\sim) \cap (\ \ ) \\ d \perp c \end{cases} \Rightarrow d \perp (\ \ )$$

*CACH 3: Söû dung ñònh lí:''Neu hai mp phan biet cung vuong goc vôi mp thö 3 thì giao tuyen cua chung cung se vuong goc vôi mp ño''.

$$\begin{cases} (\sim) \perp (\text{¥}) \\ (\ \ ) \perp (\text{¥}) \\ c = (\sim) \cap (\ \ ) \end{cases} \Rightarrow c \perp (\text{¥})$$

2/ Phöông phap chöng minh 2 ñöông thang vuong goc

Muon chöng minh hai ñöông thang vuong goc ta chöng minh ñöông thang nay vuong goc vôi mot mặt phẳng chöa ñöông thang kia.

$$\begin{cases} d \perp (\sim) \\ a \subset (\sim) \end{cases} \Rightarrow d \perp a$$

3/ Phöông phap chöng minh 2 mat phang vuong goc

Muon chöng minh hai mặt phẳng vuong goc ta chöng minh mặt phẳng nay chöa mot ñöông thang vuong goc vôi mặt phẳng kia.

$$\begin{cases} d \subset (\sim) \\ d \perp (\ \ ) \end{cases} \Rightarrow (\sim) \perp (\ \ )$$

III. CAC VAN ÑE VE GOC

1/ Goc giöa hai ñöông thang

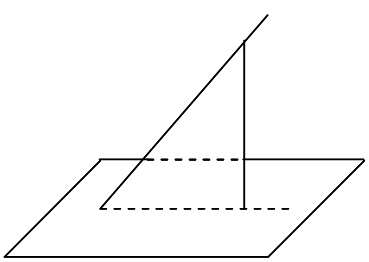
Ñònh nghóa: Goc giöa hai ñöông thang a, b trong khong gian la goc giöa hai ñöông thang a', b' nao ño cung ñi qua mot ñiem va lan löôt song song vôi a, b.

$$(\widehat{a,b}) = (\widehat{a',b'})$$

2/ Goc giöa ñöông thang va mat phang

a) Ñịnh nghĩa: Goc giöa ñöông thang a va mặt phẳng $(\sim)$ la goc giöa chính ñöông thang a va hình chieu cua no len mat phang $(\sim)$

b) *Phương pháp thực hiện.*

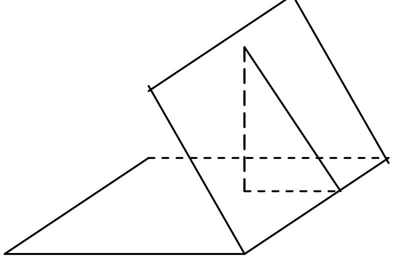


*PP: Goi ¨ la goc can tìm.
-B1: Tìm giao ñiem O cua a va $(\sim)$
-B2: Tìm ñöông vuong goc tö ñöông thang a xuong mat phang $(\sim)$
-B3: $\Rightarrow$ OH la hình chieu cua a len $(\sim)$
Vay ¨ $= (\widehat{a,OH})$

3/ Goc giöa 2 mat phang

a) Ñịnh nghĩa: Goc giöa hai mat phang la goc giöa hai ñöông thang lan löôt vuong goc vôi GIAO TUYEN cua hai mat phang ño.

b) *Phương pháp.*



*PP: Goi ¨ la goc can tìm
-B1: Xac ñònh giao tuyen c cua $(\sim)$ va $(\ \ )$
-B2: Tìm ñöông vuong goc vôi mot trong hai mat phang.
-B3: Tö chan ñöông vuong goc, ha ñt vuong goc vôi gt c tai H.
-B4: Chöng minh ñt ha tö ñænh ñöông vuong goc xuong H vuong goc vôi gt c.
Suy ra goc ¨ .

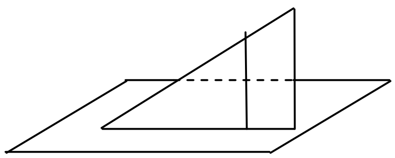
IV. CAC VAN ÑE VE KHOANG CACH

1. Khoang cach tö mot ñiem ñen mot mp

Ñe xac ñònh khoang cach tö ñiem A ñen mp $(\sim)$,ta tìm mot ñt thoa: $a:\begin{cases} +Qua\ \ A \\ +\perp\ (\sim)\ \text{tai}\ H \end{cases}$

Khi ño : AH la khoang cach can tìm

Löu y:



Neu AB cat $(\sim)$ tai I thì

$$\frac{d(A,(\sim))}{d(B,(\sim))}=\frac{IA}{IB}$$

2. Khoang cach giöa ñöông thang va mp song song la khoang cach tö mot ñiem bat kì tren ñt ñen mp

$$AB \parallel (\sim) \Rightarrow d(AB,(\sim)) = IH, I \in AB$$

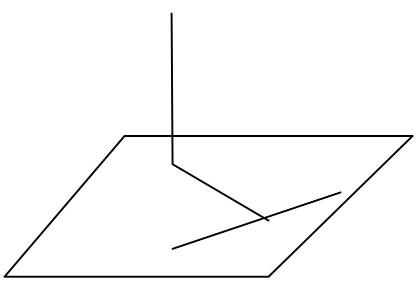
3. Khoang cach giöa hai mp song song la khoang cach tö mot ñiem bat kì tren mp nay ñen mp kia

$$(\sim) \parallel (\ \ ) \Rightarrow d((\sim),(\ \ )) = d(A,(\ \ )), A \in (\sim)$$
$$= d(B,(\sim)), B \in (\ \ )$$

4. Khoang cach giöa hai ñöông thang cheo nhau

Nhac lai: Ñöông vuong goc chung cua 2 ñt cheo nhau a, b la ñt cat a, b va ñong thôi vuong goc vôi 2 ñt ño.

*TH1: a, b cheo nhau va $a \perp b$. Khi ño:



PP:

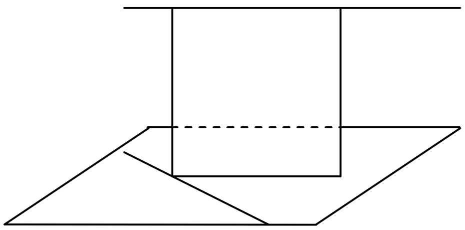
-B1: Tìm mp $(\sim)$ $\begin{cases} +\text{Chöa}\ \ b \\ +\perp a\ \ \text{tai}\ \ A \end{cases}$

-B2: Tö A ke AB $\perp b$ tai B

$\Rightarrow$ AB la ñoan vuong goc chung cua a va b

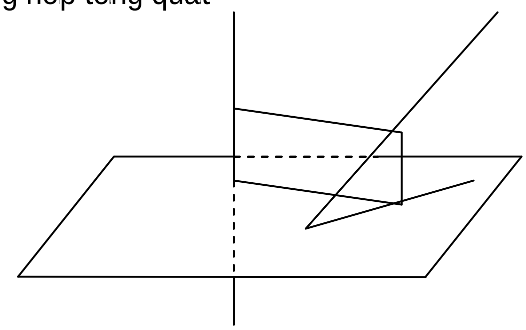
Vay $d(a,b) = AB$

*TH2: a, b cheo nhau ñong thôi co mp $(\sim)$ chöa b va song song vôi a



PP:
-B1: Lay $M \in a$,ke $MH \perp (\sim)$ tai H
-B2: Tö H döng $a' \| a$, cat b tai B
-B3: Tö B döng ñt || MH cat a tai A
$\Rightarrow$ AB la ñoan vuong goc chung
Vay $d(a,b) = AB = MH = d(M,(\sim))$

*TH3: Tröông hôp tong quat



PP
- Döng mp $(\sim)$ vuong goc vôi a tai O. Döng hình chieu vuong goc b' cua b tren $(\sim)$
- Döng hình chieu vuong goc H cua O tren b'. Tö H döng ñt song song vôi a cat b tai B
- Tö B döng ñt song song vôi OH, cat a tai A

Ñoan AB la ñoan vuong goc chung

d(a,b) = AB = OH

MOT SO CONG THÖC ÑANG NHÔ:

$S_{\text{hình vuong}}$ = canh ^{2}	Diện tích hình chữ nhật = dài . rộng
Ñöông cheo hình vuong = canh . $\sqrt{2}$	$S_{\text{hìnhtron}}$=® R^2
Diện tích tam giác thường $=\frac{1}{2}$(cạnh đy.đường cao)	The tích khoi chop V = $\frac{1}{3}$ ($S_{\text{ñay}}$ × cao)
Diện tích tam giác thường = $\frac{1}{2}$ a . b (a, b la 2 canh goc vuong)	The tích khoi lang tru V = $S_{\text{ñay}}$ × cao
Diện tích tam giác đều = $\frac{canh^2 \times \sqrt{3}}{4}$	The tích khoi cau V=$\frac{4}{3}$® R^3

Ñöôøng cao tam giác ñeàu = $\frac{canh\times\sqrt{3}}{2}$	Dieän tích maët caàu S= 4® R^2
$S_{\text{hình thang}}=\frac{1}{2}$ (ñaùy nhoû + ñaùy lôùn) × cao	Theå tích khoái noùn V= $\frac{1}{3}$ ($S_{\text{ñaùy}}$ × cao)= $\frac{1}{3}$® R^2h
Tam giác ABC vuông tại A: $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}$	Theå tích khoái truï V= $S_{\text{ñaùy}}$ × cao =® R^2h

K. SỐ PHỨC

1. Định nghĩa số phức và các khái niệm liên quan

Định nghĩa :

Số phức là một biểu thức có dạng $a+bi$; trong đó $a,b\in\mathbb{R}$ và $i^2=-1$.

Tập hợp các số phức được kí hiệu là $\mathbb{C}$.

- Nếu $z=a+bi$ thì a gọi là ***phần thực*** và b là ***phần ảo*** của số phức z.
- z gọi là số thực khi $a=0$
- z gọi là số thuần ảo khi $b=0$

Các khái niệm liên quan :

Cho số phức $z=a+bi$. Khi đó :

- Mỗi số phức $z=a+bi$ được biểu diễn bởi một điểm $M(a;b)$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy.
- $|z|=\left|\overline{OM}\right|=\sqrt{a^2+b^2}$ gọi là ***mođun*** của số phức z.
- Số phức $\overline{z}=a-bi$ gọi là số phức ***liên hợp*** của số phức z.

Hai số phức bằng nhau :

Cho số phức $z=a+bi$ và $z'=a'+b'i$. Khi đó:

$$\boxed{z=z'\Leftrightarrow\begin{cases}a=a'\\ b=b'\end{cases}}$$

2. Các phép toán trên tập hợp số phức

Phép cộng, trừ, nhân hai số phức :

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$
$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$$
$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

Chú ý :

- Các phép toán : cộng, trừ, nhân hai số phức thực hiện như rút gọn biểu thức đại số thông thường với chú ý rằng $i^2=-1$.
- Các quy tắc đại số đã áp dụng trên tập số thực vẫn được áp dụng trên tập số phức.
- Cho $z=a+bi$. Khi đó : $z.\overline{z}=a^2+b^2$.

Phép chia hai số phức :

$$\frac{z'}{z}=\frac{z'.\overline{z}}{z.\overline{z}}\ (z\neq 0).$$

Số phức nghịch đảo của z $(z\neq 0)$: $z^{-1}=\dfrac{1}{z}$

3. Phương trình bậc hai

Căn bậc hai của số thực âm :

Cho a là số *thực âm*. Khi đó a có *hai căn bậc hai* là : $i\sqrt{|a|}$ và $-i\sqrt{|a|}$.

Cách giải phương trình bậc hai với hệ số thực :

$$\left(az^2+bz+c=0; a,b,c\in\mathbb{R}; a\neq 0\right).$$

Tính $\Delta = b^2-4ac$.
Kết luận :

- Nếu $\Delta>0$ thì phương trình có hai nghiệm thực phân biệt $z_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Nếu $\Delta=0$ thì phương trình có một nghiệm kép thực $z_1=z_2=\dfrac{-b}{2a}$.
- Nếu $\Delta<0$ thì Δ có hai căn bậc hai là $i\sqrt{|\Delta|}$ và $-i\sqrt{|\Delta|}$. Khi đó phương trình có hai nghiệm phức phân biệt là $z_1=\dfrac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ và $z_2=\dfrac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.

4 Dang löông giac cua so phöc

4.1 Dang löông giac cua z = a + bi (a, b $\in \boldsymbol{R}, z\neq 0$) la:

$$z = r(\cos\text{¤}+i\sin\text{¤}) \Leftrightarrow \begin{cases} r=\sqrt{a^2+b^2} \\ \cos\text{¤}=\dfrac{a}{r} \\ \sin\text{¤}=\dfrac{b}{r}\end{cases}$$

+ ¤ la mot acgumen cua z.

+ $\text{¤}=(Ox,OM)$

4.2 Nhan chia so phöc döôi dang löông giac.

Neu z = r($\cos\text{¤}+i\sin\text{¤}$), $z'=r'(\cos\text{¤}'+i\sin\text{¤}')$ thì :

a) $z.z'=r.r'[\cos(\text{¤}+\text{¤}')+i\sin(\text{¤}+\text{¤}')]$

b) $\dfrac{z}{z'}=\dfrac{r}{r'}[\cos(\text{¤}-\text{¤}')+i\sin(\text{¤}-\text{¤}')]$

4.3 Cong thöc Moa-vrô : $n\in N^*$ thì $[r(\cos\text{¤}+i\sin\text{¤})]^n=r^n(\cos n\text{¤}+i\sin n\text{¤})$

4.4 Can bac hai cua so phöc döôi dang löông giac :

Can bac hai cua so phöc z = r($\cos\text{¤}+i\sin\text{¤}$) (r > 0) la : $r(\cos\dfrac{\text{¨}}{2}+i\sin\dfrac{\text{¨}}{2})$

va $-r(\cos\dfrac{\text{¨}}{2}+i\sin\dfrac{\text{¨}}{2})=\sqrt{r}[\cos(\dfrac{\text{¨}}{2}+\text{®})+i\sin(\dfrac{\text{¨}}{2}+\text{®})]$