

CHƯƠNG 2

TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO VÀ ỨNG DỤNG

BÀI 1: GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC BẤT KỲ TỪ 0° ĐẾN 180°

VẤN ĐỀ 1: SỬ DỤNG MÁY TÍNH CASIO FX- 500MS ĐỂ TÍNH GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC

A. PHƯƠNG PHÁP

- Chuyển sang độ: shif mode 3
- Chuyển sang radian : shif mode 4
- Tính giá trị lượng giác của góc

B. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1: Tính giá trị biểu thức

a, $a \sin 0^{\circ} + b \cos 0^{\circ} + c \sin 90^{\circ}$

b, $a \cos 90^{\circ} + b \sin 90^{\circ} + c \sin 180^{\circ}$

c, $a^2 \sin 90^{\circ} + b^2 \cos 90^{\circ} + c^2 \cos 180^{\circ}$

Bài 2: Tính giá trị biểu thức

a, $3 - \sin^2 90^{\circ} + 2 \cos^2 60^{\circ} - 3 \tan^2 45^{\circ}$

b, $4a^2 \sin 45^{\circ} - 3(a \tan 45^{\circ})^2 + (2a \cos 45^{\circ})^2$

Bài 3: Tính giá trị của các biểu thức sau

a, $\sin x + \cos x$ khi $x = 0^{\circ}, 45^{\circ}, 60^{\circ}$

b, $2 \sin x + \cos 2x$ khi $x = 45^{\circ}, 30^{\circ}$

Bài 4: Tìm x biết

a, $\sin x = 0,3502$

b, $\tan x = 2$

c, $\cot x = 2,619$

Bài giải:

a, Ấn liên tiếp các phím: shift sin 0,3502= o''', màn hình hiện lên $20^{\circ}29'58''$. Vậy $x = 20^{\circ}29'58''$

b, Ấn liên tiếp các phím: shift tan(1;2,69)= o'''. màn hình hiện lên $20^{\circ}53'53''$. Vậy $x = 20^{\circ}53'53''$

Bài 5: Rút gọn biểu thức

$$A = \tan(-3,1\pi) \cdot \cos(5,9\pi) - \sin(-3,6\pi) \cdot \cot(-5,6\pi)$$

VẤN ĐỀ 2: SỬ DỤNG CÁC HẰNG ĐẲNG THỨC CƠ BẢN ĐỂ TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC

A. PHƯƠNG PHÁP

$\forall \alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$, Ta có

- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

- $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha + 1 (\alpha \neq 90^\circ)$

- $\frac{1}{\sin^2 \alpha} = \cot^2 \alpha + 1 (\alpha \neq 0^\circ, \alpha \neq 180^\circ)$

- $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$

- Với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ thì $\sin \alpha > 0, \cos \alpha > 0, \tan \alpha > 0, \cot \alpha > 0$

- Với $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ thì $\sin \alpha > 0, \cos \alpha < 0, \tan \alpha < 0, \cot \alpha < 0$

VD1: a) Cho góc nhọn α và $\sin \alpha = \frac{1}{4}$. Tính $\cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$

b) Cho góc α và $\cos \alpha = \frac{-1}{3}$. Tính $\sin \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$

c) Cho $\tan x = 2\sqrt{2}$. Tính $\sin x, \cos x$

Giải:

a) Do $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ nên $\cos \alpha > 0$, suy ra $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{15}}{15}; \quad \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \sqrt{15}$$

b) $\forall \alpha \in (0^\circ; 180^\circ)$ thì $\sin \alpha > 0$ nên $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -2\sqrt{2}; \quad \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

c) Do $\tan x = 2\sqrt{2} > 0$ nên $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

$$\cos x = \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 x}} = \frac{1}{3}$$

VD2 : Cho $90^\circ < \alpha < 180^\circ, \sin \alpha = \frac{4}{5}$.

Tính giá trị biểu thức $Q = 3\cos^2 \alpha - 4\cos \alpha + 2\sin^2 \alpha$

B. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1: Cho giá trị lượng giác của một góc. Tính giá trị của một biểu thức

$a, \sin x = \frac{1}{3}; 90^\circ < x < 180^\circ$. Tính $A = \frac{\tan x + 3\cot x + 1}{\tan x + \cot x}$

$b, \tan \alpha = \sqrt{2}$. Tính $B = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3\cos^3 \alpha + 2\sin \alpha}$

HD: Chia tử và mẫu cho $\cos^3 \alpha$

Bài 2: Cho góc nhọn α và $\sin \alpha = \frac{2}{5}$. Tính $\cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$

Bài 3: Cho góc α và $\cos \alpha = \frac{-3}{5}$. Tính $\sin \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$

Bài 4: Cho góc α và $\cot \alpha = 3 (0^\circ < x < 90^\circ)$. Tính $\sin \alpha, \tan \alpha, \cos \alpha$

Bài 5: Cho $\cot x = -3$; Tính $A = \frac{\sin^2 x - 2\cos^2 x + 2\sin x \cos x}{2\sin^2 x - 3\sin x \cos x + \cos^2 x}$

Bài 6: Cho $\sin x + \cos x = \frac{5}{4}$. Tính $A = \tan x + \cot x$

VẤN ĐỀ 3: SỬ DỤNG GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA HAI GÓC PHỤ NHAU, BÙ NHAU

A. PHƯƠNG PHÁP: Sử dụng tính chất với mỗi góc $\alpha (0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ)$

***Góc phụ nhau**

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha; \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha;$$

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha; \cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha;$$

***Góc bù nhau**

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha; \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha;$$

$$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha; \cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha;$$

B. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1: Đơn giản biểu thức

$$a, \sin 70^\circ + \sin 110^\circ + \cos 25^\circ + \cos 145^\circ$$

$$b, 2\cos(180^\circ - x)\tan x - \sin(180^\circ - x) \cdot \cot x \cdot \tan(180^\circ - x)$$

Bài 2: Chứng minh rằng trong tam giác ABC có

$$a, \sin A = \sin(B+C)$$

$$b, \cos A = -\cos(B+C)$$

Bài 3: Đơn giản biểu thức

$$a, A = \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 60^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$$

$$b, B = \cos^2 12^\circ + \cos^2 78^\circ + \cos^2 1^\circ + \cos^2 89^\circ$$

$$c, C = \sin^2 3^\circ + \sin^2 75^\circ + \sin^2 15^\circ + \sin^2 87^\circ$$

Giải:

$$a, A = -\cos 160^\circ - \cos 140^\circ - \cos 120^\circ - \cos 100^\circ + \cos 100^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ = -1$$

$$b, B = \sin^2 78^\circ + \cos^2 78^\circ + \sin^2 89^\circ + \cos^2 89^\circ = 2$$

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Giá trị của $\sin 60^\circ + \cos 30^\circ$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. $\sqrt{3}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D. 1

Câu 2: Giá trị của $\tan 30^\circ + \cot 30^\circ$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{4}{\sqrt{3}}$

B. $\frac{1+\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{2}{\sqrt{3}}$

D. 2

Câu 3: Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào đúng?

A. $\sin 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. $\cos 150^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\tan 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

D. $\cot 150^\circ = \sqrt{3}$

Câu 4: Cho α và β là hai góc khác nhau và bù nhau, trong các đẳng thức sau đây đẳng thức nào **sai**?

A. $\sin \alpha = \sin \beta$

B. $\cos \alpha = -\cos \beta$

C. $\tan \alpha = -\tan \beta$

D. $\cot \alpha = \cot \beta$

Câu 5: Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào **sai**?

A. $\sin(180^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$

B. $\cos(180^\circ - \alpha) = \cos \alpha$

C. $\tan(180^\circ - \alpha) = \tan \alpha$

D. $\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$

Câu 6: Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào **sai**?

A. $\sin 0^\circ + \cos 0^\circ = 1$

B. $\sin 90^\circ + \cos 90^\circ = 1$

C. $\sin 180^\circ + \cos 180^\circ = -1$ D. $\sin 60^\circ + \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

Câu 7: Cho góc α tù. Điều khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\sin \alpha < 0$ B. $\cos \alpha > 0$ C. $\tan \alpha > 0$ D. $\cot \alpha < 0$

Câu 8: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. $\cos 60^\circ = \sin 30^\circ$ B. $\cos 60^\circ = \sin 120^\circ$
 C. $\cos 30^\circ = \sin 120^\circ$ D. $\sin 60^\circ = -\cos 120^\circ$

Câu 9: Đẳng thức nào sau đây sai :

A. $\sin 45^\circ + \sin 45^\circ = \sqrt{2}$ B. $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ = 1$.
 C. $\sin 60^\circ + \cos 150^\circ = 0$ D. $\sin 120^\circ + \cos 30^\circ = 0$

Câu 10: Cho hai góc nhọn α và β ($\alpha < \beta$). Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $\cos \alpha < \cos \beta$ B. $\sin \alpha < \sin \beta$ C. $\tan \alpha + \tan \beta > 0$ D. $\cot \alpha > \cot \beta$

Câu 11: Cho ΔABC vuông tại A, góc B bằng 30° . Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $\cos B = \frac{1}{\sqrt{3}}$ B. $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\cos C = \frac{1}{2}$ D. $\sin B = \frac{1}{2}$

Câu 12: Điều khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\sin \alpha = -\sin(180^\circ - \alpha)$ B. $\cos \alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$
 C. $\tan \alpha = \tan(180^\circ - \alpha)$ D. $\cot \alpha = \cot(180^\circ - \alpha)$

Câu 13: Tìm khẳng định sai trong các khẳng định sau:

A. $\cos 75^\circ > \cos 50^\circ$ B. $\sin 80^\circ > \sin 50^\circ$
 C. $\tan 45^\circ < \tan 60^\circ$ D. $\cos 30^\circ = \sin 60^\circ$

Câu 14: Bất đẳng thức nào dưới đây là đúng?

A. $\sin 90^\circ < \sin 100^\circ$ B. $\cos 95^\circ > \cos 100^\circ$
 C. $\tan 85^\circ < \tan 125^\circ$ D. $\cos 145^\circ > \cos 125^\circ$

Câu 15: Hai góc nhọn α và β phụ nhau, hệ thức nào sau đây là sai?

A. $\sin \alpha = \cos \beta$ B. $\tan \alpha = \cot \beta$ C. $\cot \beta = \frac{1}{\cot \alpha}$ D. $\cos \alpha = -\sin \beta$

Câu 16: Trong các hệ thức sau hệ thức nào đúng?

A. $\sin^2 \alpha + \cos \alpha^2 = 1$

B. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1$

C. $\sin \alpha^2 + \cos \alpha^2 = 1$

D. $\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1$

Câu 17: Cho biết $\sin \alpha + \cos \alpha = a$. Giá trị của $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ bằng bao nhiêu?

A. $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = a^2$

B. $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2a$

C. $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1-a^2}{2}$

D. $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{a^2 - 11}{2}$

Câu 18: Cho biết $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $E = \frac{\cot \alpha + 3 \tan \alpha}{2 \cot \alpha + \tan \alpha}$?

A. $-\frac{19}{13}$

B. $\frac{19}{13}$

C. $\frac{25}{13}$

D. $-\frac{25}{13}$

Câu 19: Cho biết $\cot \alpha = 5$. Tính giá trị của $E = 2 \cos^2 \alpha + 5 \sin \alpha \cos \alpha + 1$?

A. $\frac{10}{26}$

B. $\frac{100}{26}$

C. $\frac{50}{26}$

D. $\frac{101}{26}$

Câu 20: Đẳng thức nào sau đây là **sai**?

A. $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2, \forall x$

B. $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \sin^2 x, \forall x \neq 90^\circ$

C. $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x, \forall x$

D. $\sin^6 x - \cos^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x, \forall x$

Câu 21: Đẳng thức nào sau đây là **sai**?

A. $\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} (x \neq 0^\circ, x \neq 180^\circ)$

B. $\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x} (x \neq 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ)$

C. $\tan^2 x + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} - 2 (x \neq 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ)$

D. $\sin^2 2x + \cos^2 2x = 2$

BÀI 2: TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VEC TƠ

VẤN ĐỀ 1: XÁC ĐỊNH GÓC GIỮA HAI VEC TƠ

A. PHƯƠNG PHÁP:

Cho $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$. Từ một điểm O bất kỳ vẽ $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}$

Khi đó $(\vec{a}, \vec{b}) = \widehat{AOB} \left(0^\circ \leq \widehat{AOB} \leq 180^\circ \right)$

Chú ý:

- Góc giữa hai véc tơ \vec{a}, \vec{b} không phụ thuộc việc chọn điểm O. Có thể chọn điểm O trùng với điểm đầu của một trong hai véc tơ

- $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

- $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng

- $(\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng

VD1: Cho hình vuông ABCD. Tính giá trị lượng giác của góc giữa các cặp véc tơ sau

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}); (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CA}); (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD});$
 $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{DC}); (\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{AC}); (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}); (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CB})$

HD:

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{BAC} = 45^\circ; (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AM}) = \widehat{MAD} = 135^\circ$

$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = 90^\circ; (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) = 180^\circ$

B. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1: Cho hình chữ nhật ABCD có AB=4cm, AD=3cm. Tính các góc $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}), (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BC})$

Bài 2: Cho tam giác ABC vuông tại A và $\widehat{B} = 30^\circ$. Tính giá trị của các biểu thức sau

a, $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + \sin(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + \tan \frac{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB})}{2}$

b, $\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BA})$

Bài 3: Cho tam giác đều ABC, gọi G là trọng tâm. Tính giá trị lượng giác của góc giữa các cặp véc tơ sau

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}); (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}); (\overrightarrow{GC}, \overrightarrow{GB});$

$(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{CG}); (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC});$

Bài 4: Cho tam giác ABC vuông tại A , góc $B = 50^\circ$. Kẻ đường cao AH ($H \in BC$), đường phân giác trong của góc C là CK ($K \in AB$). Xác định góc giữa 2 vectơ \overrightarrow{AH} và \overrightarrow{CK} .

VẤN ĐỀ 2: TÍNH TÍCH VÔ HƯỚNG GIỮA HAI VÉC TƠ

A. PHƯƠNG PHÁP: Sử dụng công thức

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$$

$$*(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$$

- Một số tính chất: $*(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$

$$*\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

B. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1: Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB=a$, $BC=2a$. Tính các tích vô hướng

$a, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ $b, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$ $c, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$

Bài 2: Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a . Tính các tích vô hướng

$a, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ $b, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$ $c, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$

Bài 3: Cho tam giác ABC có $AB=5$, $BC=7$, $AC=8$.

a, Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ rồi suy ra giá trị góc A b, Tính $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$

c, Gọi D là điểm trên CA sao cho $CD=3$. Tính $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB}$

Giải:

$$a, BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = AC^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + AB^2$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}$$

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \cdot AC}$$

Bài 4: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính các biểu thức

$a, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ $b, (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})$ $c, (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})(2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})$

$d, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$ $e, (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$

ĐS: a, a^2 b, a^2 c, $2a^2$ d, $-a^2$ e, 0

Bài 5: Cho tam giác đều ABC cạnh bằng $3a$. Gọi M, N là 2 điểm thuộc cạnh AC sao cho $AM=MN=NC$. Tính các tích vô hướng sau $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BN}$;

HD: $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BN} = (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB})$

Bài 6: Cho tam giác ABC có trọng tâm G, M là một điểm di động trên đường thẳng d qua G và vuông góc BC. CMR $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}).\overrightarrow{BC} = \vec{0}$

Bài 7: Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a, gọi M, N lần lượt là trung điểm BC, CD. Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN}$;

HD: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM})(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN})$
 $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM})\overrightarrow{AB}$

VẤN ĐỀ 3: CHỨNG MINH MỘT ĐẲNG THỨC VỀ TÍCH VÔ HƯỚNG HAY TÍCH ĐỘ DÀI

A. PHƯƠNG PHÁP

- Sử dụng định nghĩa, các tính chất để chứng minh

- Lưu ý: $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})^2$ với mọi điểm O

VD1: Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 120^\circ; AB = 3; AC = 6$. Tính cạnh BC

HD: $BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2$
 $= AC^2 - 2AC.AB.\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) + AB^2 = 63$

VD 2: Cho tam giác ABC với trọng tâm G, $BC=a, AC=b, AB=c$.

a, CMR/ $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$ b, Tính độ dài AG theo a,b,c

HD: $BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2$

$BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2$

Suy ra $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{BC}^2}{2} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$

b) Gọi M là trung điểm BC, ta có

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

$$AG^2 = \frac{1}{9}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 = \frac{1}{9}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$$

B. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1: Cho hình vuông ABCD tâm O, cạnh a. CMR với mọi điểm M ta có

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4MO^2 + 2a^2$$

$$MA^2 = \overrightarrow{MA}^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2; MB^2 = \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2$$

$$\text{HD: } MC^2 = \overrightarrow{MC}^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})^2; MD^2 = \overrightarrow{MD}^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD})^2$$

Bài 2: Cho ΔABC , G là trọng tâm. CMR

a) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

b) $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$, M bất kỳ. Suy ra $MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt GTNN

Bài 3: Cho ΔABC , M là trung điểm BC và H là trực tâm. CMR

a) $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{1}{4}BC^2$

B) $MA^2 + MH^2 = AH^2 + \frac{1}{2}BC^2$

Bài 4: Cho hình chữ nhật ABCD, M tùy ý. CMR

a) $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$ b) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$ c) $MA^2 = 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MO}$, O là tâm hcn và M thuộc đường tròn ngoại tiếp hcn.

VẤN ĐỀ 4: TÌM TẬP HỢP ĐIỂM THỎA MÃN ĐẲNG THỨC VỀ TÍCH VÔ HƯỚNG HAY TÍCH ĐỘ DÀI

A. PHƯƠNG PHÁP:

Để tìm tập hợp điểm M thỏa đẳng thức véc tơ cho trước ta sử dụng một trong các cách sau:

- Biến đổi đẳng thức cho trước về dạng $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$ (A, B cố định, k là giá trị không đổi)
- Biến đổi đẳng thức cho trước về dạng $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{v} = 0$ (A là điểm cố định, \vec{v} là một véc tơ cố định)
- Biến đổi đẳng thức cho trước về dạng $AM^2 = k$ (A là điểm cố định, k là số dương không đổi)

VD1: Cho tam giác ABC, Tìm tập hợp M thỏa mãn

$$\text{a) } (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) = 0 \quad \text{b) } MA^2 + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$$

HD:a) Ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ (I là trung điểm AB)

$$(1) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow MI \perp BC$$

Vậy tập hợp M là đường thẳng d qua I và vuông góc BC

$$\begin{aligned} \text{b) } (2) &\Leftrightarrow MA^2 + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MI} = 0 \Leftrightarrow MA \perp MI \end{aligned}$$

Vậy tập hợp M là đường tròn đường kính AI

VD2: Cho hình vuông ABCD cạnh bằng a. Tìm tập hợp M thỏa

$$\text{a) } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \frac{-a^2}{4} \quad \text{b) } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = a^2$$

$$\text{c) } (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) = a^2$$

HD: a) Gọi O là tâm hình vuông

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \frac{-a^2}{4} \Leftrightarrow (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}) = \frac{-a^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow MO^2 - OA^2 = \frac{-a^2}{4} \Leftrightarrow MO^2 = OA^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$\text{b) } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = a^2 \Leftrightarrow 2MO^2 - OA^2 - OB^2 = a^2$$

$$\Leftrightarrow MO^2 = a^2 \left(OA = OB = \frac{a\sqrt{2}}{2} \right)$$

B. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1: Cho ΔABC , tìm tập hợp những điểm M thỏa mãn:

$$\text{a) } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k, \text{ k là số cho trước.}$$

$$\text{b) } MA^2 + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \quad \text{c) } MB^2 + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = a^2 \text{ với } BC = a.$$

Bài 2: Cho ΔABC , tìm tập hợp những điểm M thoả mãn:

- a) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = k$, k là số cho trước. b) $MA^2 - MB^2 + CA^2 - CB^2 = 0$
 c) $MC^2 - MB^2 + BC^2 = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC}$ d) $3MA^2 = 2MB^2 + MC^2$

Bài 3: Cho đoạn AB. Tìm tập hợp điểm M thoả mãn:

- a) $MA^2 - 2MB^2 = k$, k cho trước b) $3MA^2 + MB^2 = AB^2$ c) $2MA^2 = MA \cdot MB$

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho tam giác ABC vuông tại A có $\hat{ABC} = 65^\circ$. Khi đó $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ có giá trị là:

- A. 65° B. 25° C. 115° D. 125°

Câu 2: Cho tam giác ABC vuông tại A có $\hat{ABC} = 65^\circ$. Gọi M là trung điểm của BC. Khi đó $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BC})$ có giá trị là:

- A. 65° B. 25° C. 115° D. 50°

Câu 3: Cho tam giác đều ABC. Gọi M là trung điểm của BC. Khi đó $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BC})$ có giá trị là:

- A. 65° B. 50° C. 115° D. Đáp án khác

Câu 4: Cho tam giác đều ABC cạnh AB=6cm. Gọi M là một điểm trên AC sao cho $AM = \frac{1}{3}AC$. Khi đó tích vô hướng $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CA}$ bằng

- A. -12 B. $\frac{25}{2}$ C. 12 D. $12\sqrt{2}$

Câu 5: Cho tam giác ABC vuông tại A, góc $\hat{B} = 50^\circ$. Kẻ đường cao AH ($H \in BC$), đường phân giác trong của góc C là CK ($K \in AB$). Xác định góc giữa 2 vectơ \overrightarrow{AH} và \overrightarrow{CK} .

- A. 110° . B. 120° . C. 100° . D. 90° .

Câu 7: Cho tam giác ABC có $AB=5, BC=7, AC=8$. Gọi D là điểm trên CA sao cho $CD=3$. Tính $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB}$

- A. $\frac{23}{2}$ B. $\frac{33}{2}$ C. $\frac{5}{2}$ D. $\frac{9}{2}$

Câu 8: Cho hình vuông ABCD cạnh bằng a. Hai điểm M và N lần lượt là trung điểm của BC và CD. Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$.

- A. $a^2; \frac{1}{2}a^2$ B. $2a^2; 2a^2$ C. $\frac{3}{2}a^2; \frac{1}{2}a^2$ D. $a^2; a^2$

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0; \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0; \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$

C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = a^2; \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = a^2; \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$

Câu 18: Cho tam giác ABC vuông tại C có AC = 9 và BC = 5. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

A. 45

B. 45/2

C. 81

D. 96

Câu 19: Cho tam giác ABC có AB=2 BC = 4 và CA = 3. CosA là

A. $-\frac{3}{2}$

B. $-\frac{1}{4}$

C. $-\frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{4}$

Câu 20: Cho tam giác ABC có AB=2 BC = 4 và CA = 3. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$

A. $\frac{3}{2}$

B. $-\frac{1}{4}$

C. $-\frac{3}{2}$

D. -3

Câu 21: Cho tam giác ABC có AB=2 BC = 4 và CA = 3. Tính $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA}$

A. $-\frac{29}{6}$

B. $-\frac{29}{3}$

C. $\frac{29}{6}$

D. $-\frac{29}{6}$

Câu 22: Cho tam giác ABC . và M là một điểm bất kỳ . Tìm công thức đúng

A. $MA^2 + MB^2 + MC^2 = MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$ B. $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2$

C. $MA^2 + MB^2 + MC^2 = MG^2 + 3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$

D. $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$

Câu 23: Cho tam giác ABC có AB=2 BC = 4 và CA = 3. Tính độ dài đường phân giác trong góc A

A. $AD = \frac{3\sqrt{6}}{10}$

B. $AD = \frac{6\sqrt{3}}{5}$

C. $AD = \frac{3\sqrt{9}}{5}$

D. $AD = \frac{\sqrt{54}}{5}$

Câu 24: Cho 2 điểm cố định A và B và M là một điểm bất kỳ. H là hình chiếu của M lên AB và I là trung điểm của AB. Tìm biểu thức sai:

A. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$

B. $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$

C. $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IH}$

D. $(\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2) \overrightarrow{AB} = MI^2$

Câu 25: Cho tứ giác ABCD. Khi đó $AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2 =$

A. 0

B. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$

C. $2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$

D. $2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$

VẤN ĐỀ 5: BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG

A. PHƯƠNG PHÁP

Cho các véc tơ $\vec{a} = (a_1; a_2), \vec{b} = (b_1; b_2)$, Ta có các công thức sau

$$a, |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$b, \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

$$c, \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 = 0$$

$$d, \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

$$*\vec{b} \text{ cùng phương với } \vec{a} \text{ khác } \vec{0} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} / \begin{cases} b_1 = ka_1 \\ b_2 = ka_2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} (a_1 \neq 0; a_2 \neq 0)$$

*Cho $A(x_A; y_A); B(x_B; y_B)$. Khi đó

$$\vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A).$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

VD1: Trong hệ trục tọa độ Oxy cho $\vec{a} = (6; 3), \vec{b} = (0; -6)$

a, Tính $|\vec{a}|, |\vec{b}|, |\vec{a} + 2\vec{b}|$ b, Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$

c, Tính góc giữa hai véc tơ \vec{a}, \vec{b}

VD2: Trong hệ trục tọa độ Oxy cho $\vec{a} = (4; 3), \vec{b} = (1; 7)$. Tính góc giữa hai véc tơ \vec{a}, \vec{b}

VD3: Cho 2 điểm M(1;-2), N(-3;4). Tính MN

VD4: Cho tam giác ABC với A(3;3), B(1;1), C(3;-1). Tìm số đo góc A của tam giác ABC

$$\text{HD: } \cos A = \cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|}$$

VD5: Cho tam giác ABC có A(1;2), B(-2;6), C(9;8)

a, Tính $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$. Chứng minh tam giác ABC vuông tại A

b, Tìm tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

c, Tìm tọa độ trục tâm H và trọng tâm G của tam giác ABC

d, Tính chu vi và diện tích tam giác ABC

e, Tìm tọa độ M trên Oy sao cho B, M, A thẳng hàng

f, Tìm tọa độ N trên Ox để tam giác ANC cân tại N

k, Tìm tọa độ D để ABDC là hình chữ nhật

h, Tìm tọa độ K trên Ox để AOKB là hình thang cạnh đáy AO

l, Tìm tọa độ T thỏa $\overrightarrow{TA} + 2\overrightarrow{TB} - 3\overrightarrow{TC} = \vec{0}$

m, Tìm tọa độ E đối xứng với A qua B

n, Tìm tọa độ I chân đường phân giác trong đỉnh C của tam giác ABC

HD:

a, $CM / \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ suy ra tam giác ABC vuông tại A

c, H là trực tâm tam giác ABC $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = \vec{0} \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = \vec{0} \end{cases}$

d, $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC$

e, B, M, A thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BA}$ cùng phương

f, $\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{KB}$ cùng phương

B. BÀI TẬP CƠ BẢN

Bài 1: Cho tam giác ABC có A(3;1), B(-1;-1), C(6;0). Tính góc A của tam giác ABC

Bài 2: Cho tam giác ABC có A(5;3), B(2;-1), C(-1;5).

a, Tính chu vi tam giác ABC

b, Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC

c, Tìm tọa độ trung điểm I của BC

d, Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC

k, Tìm tọa độ chân đường cao hạ từ A

Bài 3: Cho tam giác ABC với A(1;2), B(-2;1), C(-1;4)

a, Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC

b, Chứng minh tam giác ABC vuông và tính diện tích tam giác ABC

c, Tìm tọa độ D sao cho ABCD là hình vuông và tính diện tích hình vuông

Bài 5: Cho tam giác ABC có A(2;0), B(1;4), C(6;-1). Chứng minh tam giác ABC cân, Tính độ dài đường cao vẽ từ A và tính diện tích tam giác ABC

Bài 6: Trong mp tọa độ Oxy cho A(2;3), B(4;-1). Tìm M sao cho tam giác MAB vuông cân tại M

Bài 7: Cho tam giác ABC có A(-4;5), B(0;2), C(4;-1).

a, Tính cosin của góc \widehat{BAC}

b, Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{2CB} - 3\overrightarrow{AC}), \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CG}$ với G là trọng tâm tam giác ABC

Bài 8: Cho tam giác ABC có A(-1;3), B(3;1) là hai đỉnh của tam giác ABC vuông cân tại B. Tìm tọa độ B

ĐS: B(2;4); B(0;0)

Bài 9: Cho các điểm A(-2;-1), B(2;-4)

a, Tìm điểm M trên Oy sao cho $\widehat{MBA} = 45^\circ$

b, Tìm N trên Ox sao cho NA=NB

ĐS: $M(0;10); M(0;-\frac{30}{7})$

Bài 10: Cho A(1;2), B(6;3). Tìm tọa độ C nằm trên Ox sao cho tam giác ABC vuông tại C

C. BÀI TẬP NÂNG CAO

Bài 1: Cho tam giác ABC với A(0;4), B(-5;-6), C(3;-2). Tìm tọa độ phân giác trong và phân giác ngoài của góc A

Bài 2: Cho tam giác ABC với A(3;1), B(-1;-1), C(6;0).

a, Tính góc A của tam giác ABC

b, Tìm tọa độ giao điểm của đường tròn đường kính AB và đường tròn đường kính OC

HD: Gọi M(x;y) là tọa độ giao điểm của đường tròn đường kính AB và đường tròn đường kính OC

Ta có
$$\begin{cases} MA \perp MB \\ MC \perp MO \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \vec{0} \\ \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MO} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \pm\sqrt{5} \end{cases}$$

Bài 3: Cho 4 điểm A(-1;0); B(0;3); C(3;2); D(5;-2). Chứng minh tứ giác ABCD là hình thang vuông và tính diện tích hình thang này

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong mpOxy cho A(4;0) B(2;2 $\sqrt{3}$). Tìm tọa độ trực tâm của tam giác OAB

A. H(2; - $\frac{2\sqrt{3}}{3}$) B. H(6; 2 $\sqrt{3}$) C. H(-2; - $\frac{2\sqrt{3}}{3}$) D. H(2; $\frac{2\sqrt{3}}{3}$)

Câu 2: Cho tam giác ABC với A(1;0) B(-2;-1) và C(0;3). Xác định hình dạng của tam giác ABC

A. Đều B. Vuông tại A C. Vuông tại C D. Cân tại B

Câu 3: Cho tam giác ABC với A(1;0) B(-2;-1) và C(0;3). Tìm Tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

- A. Tâm I (-1;1) B. Tâm I (1;1) C. Tâm I (-1;-1) D. Tâm I (1;-1)

Câu 4: Trong mpOxy cho 2 điểm A(2;4) và B(1 ; 1) . Tìm điểm C sao cho tam giác ABC vuông cân tại B .

- A. C(4;0) và C(2;2) B. C(4;0) và C(2;2)
C. C(4;0) và C(2;2) D. C(4;0) và C(2;-2)

Câu 5 : Trong mpOxy cho tam giác ABC với A(5 ;4) B(2 ;7) và C(-2 ;-1) . Tâm I đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là:

- A. $I\left(\frac{2}{3};\frac{8}{3}\right)$ B. $I\left(\frac{2}{3};-\frac{8}{3}\right)$ C. $I\left(-\frac{2}{3};-\frac{8}{3}\right)$ D. $I\left(-\frac{2}{3};\frac{8}{3}\right)$

Câu 6: Trong mpOxy cho tam giác ABC với A(-2;3) B $\left(\frac{1}{4};0\right)$ và C(2;0). Tìm tâm J đường tròn nội tiếp tam giác ABC

- A. $J\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$ B. $J\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$ C. $J\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ D. $J\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

Câu 7: Trong mpOxy cho tam giác ABC với A(1 ; 5) B(3;-1) C(6;0).Tìm chân đường cao B' kẻ từ B lên CA.

- A. B'(10;2) B. B'(-10;2) C. B'(5;1) D. B'(5;-1)

Câu 8: Trong mpOxy cho tam giác ABC với A(0;3) B(2;2) và C(-6;1).Tính số đo của góc A

- A. 45^0 B. 30^0 C. 135^0 D. 150^0

Câu 9: Trong mpOxy cho tam giác ABC với A(1;5) B(3;-1) C(6;0). Tính diện tích tam giác ABC.

- A. 20 B. 40 C. 10 D.5

Câu 10: Cho ba điểm A (1;2) , B (-1; 1) , C (5; -1) . Khi đó $\cos(\overline{AB};\overline{AC}) = ?$

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $-\frac{2}{5}$ D. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$

Câu 11: Cho ba điểm A (1; 2) , B (-1; 1); C(5; -1) . $\cos(\overline{AB},\overline{AC}) = ?$

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{3}{7}$ D. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$

Câu 12: Cho A (-1; 2) ; B(3; 0) ; C(5; 4) . $\cos(\overline{AB},\overline{AC}) = ?$

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. 1

Câu 13: Cho $\vec{a} = (1; 2)$; $\vec{b} = (4; 3)$; $\vec{c} = (2; 3)$. Kết quả của biểu thức : $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c})$ là

- A. 18 B. 28 C. 20 D. 0

Câu 14: Cho các điểm $A(1, 1)$; $B(2, 4)$; $C(10, -2)$. Tính tích vô hướng $\overline{BA} \cdot \overline{AC}$:

- A. 30 B. 10 C. -10 D. -30

BÀI 3: HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

A. LÝ THUYẾT

1/ Định lí cosin
$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C \end{cases}$$

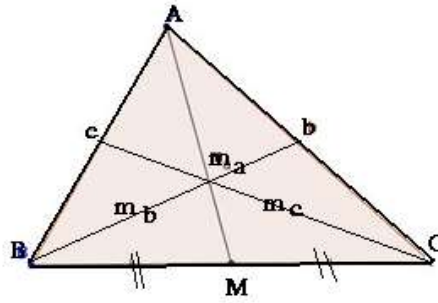
2/ Định lí sin
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \Rightarrow \begin{cases} a = 2R \sin A \\ b = 2R \sin B \\ c = 2R \sin C \end{cases}$$

3/ Độ dài trung tuyến

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$$

$$m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$$

$$m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$$



4/ Diện tích tam giác

$$S = \begin{cases} \frac{1}{2} a.h_a = \frac{1}{2} b.h_b = \frac{1}{2} c.h_c \\ \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C \\ \frac{abc}{4R} = pr \\ \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}; p = \frac{a+b+c}{2} \end{cases}$$

Giải tam giác là đi tính các cạnh và các góc của tam giác khi biết một số yếu tố cho trước

5/ Hệ thức lượng trong tam giác vuông

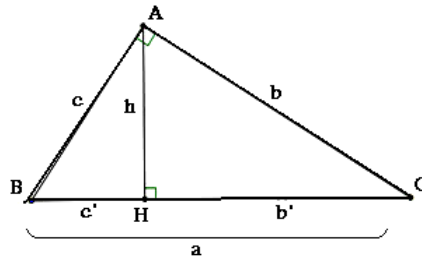
Cho tam giác ABC vuông tại A, AH là đường cao

- $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (ĐL pitago)

$$AB^2 = BC.BH; AC^2 = BC.CH$$

- $AH^2 = BH.CH; \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$

- $AH.BC = AB.AC$



6/ Hệ thức lượng trong đường tròn

Cho đường tròn (O;R) và điểm M cố định.

Từ M vẽ hai cát tuyến MAB, MCD. $P_{M/(O)} = \overline{MA.MB} = \overline{MC.MD} = MO^2 - R^2$

Nếu M nằm ngoài đường tròn vẽ tiếp tuyến MT, $P_{M/(O)} = MT^2 = MO^2 - R^2$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

DẠNG 1: XÁC ĐỊNH CÁC YẾU TỐ TRONG MỘT TAM GIÁC

PHƯƠNG PHÁP

- Sử dụng định lý sin, cosin
- Sử dụng tổng 3 góc trong một tam giác

- Sử dụng các hệ thức lượng trong tam giác

VD1: Cho tam giác ABC có $a=12, b=13, c=15$. Tính $\cos A$ và góc A

$$\text{HD: } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = 0,6410 \Rightarrow \hat{A} = 50^\circ$$

VD2: Cho tam giác ABC có $AB=5, AC=8, \hat{A} = 60^\circ$. Tính độ dài cạnh BC

VD3: Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 60^\circ, \hat{B} = 45^\circ$, cạnh $b=4$. Tính 2 cạnh a và c

$$\text{HD: } a = \frac{b \sin A}{\sin B} = 2\sqrt{6}; \hat{C} = 180^\circ - (60^\circ + 45^\circ) = 75^\circ$$

$$c = \frac{b \sin C}{\sin B} = 5,5$$

VD4: Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 60^\circ, a=6$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

$$\text{HD: } \frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = 2\sqrt{3}$$

VD5: Cho tam giác ABC có $a=7, b=8, c=6$. Tính độ dài đường trung tuyến hạ từ B

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1: Cho tam giác ABC có $b=7; c=5; \cos A = \frac{4}{5}$. Tính S, R, r của tam giác ABC

Bài 2: Cho tam giác ABC có $BC=40\text{cm}, CA=13\text{cm}, AB=37\text{cm}$. Tính góc nhỏ nhất của tam giác ABC

HD: Góc nhỏ nhất là B

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = 0,9459$$

Bài 3: Cho tam giác ABC có $AB=5\text{cm}, AC=7\text{cm}, \cos A = \frac{4}{5}$. Tính diện tích, bán kính đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp và độ dài đường cao hạ từ A

Bài 5: Cho $\triangle ABC$ có $b=20, c=35, \hat{A} = 60^\circ$.

- Tính chiều cao h_a và trung tuyến m_a của $\triangle ABC$.
- Tính các góc còn lại của $\triangle ABC$.
- Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp R , bán kính đường tròn nội tiếp r của $\triangle ABC$.

Bài 6: Cho $\triangle ABC$ biết $AB=3, AC=7, BC=8$.

- Tính các góc của $\triangle ABC$.

b) Tính diện tích S của ΔABC .

c) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp R , bán kính đường tròn nội tiếp r của ΔABC .

Bài 7: Cho ΔABC biết $BC = 9, \hat{B} = 60^\circ, \hat{C} = 45^\circ$.

a) Tính độ dài các cạnh AB, AC .

b) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp R , bán kính đường tròn nội tiếp r , diện tích S và độ dài trung tuyến m_b của ΔABC .

Bài 8: Cho ΔABC biết độ dài 3 trung tuyến lần lượt bằng 15, 18, 27.

a) Tính diện tích S của ΔABC .

b) Tính độ dài các cạnh của ΔABC .

Bài 9: Cho ΔABC biết $\hat{A} = 60^\circ, a = 10, r = \frac{5\sqrt{3}}{3}$.

a) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp R của tam giác.

b) Tính độ dài các cạnh còn lại của ΔABC .

Bài 10: Cho ΔABC có $AB = 10, AC = 4, \hat{A} = 60^\circ$.

a) Tính chu vi của ΔABC .

b) Tính $\tan C$.

DẠNG 2: GIẢI TAM GIÁC

A. PHƯƠNG PHÁP

- Giải tam giác là tìm các yếu tố của tam giác (3 cạnh và 3 góc)

- Ta sử dụng ĐL Sin, Cosin trong tam giác

B. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1: Giải tam giác ABC biết

a) $c = 14, \hat{A} = 60^\circ, \hat{B} = 40^\circ$.

b) $c = 35, \hat{A} = 40^\circ, \hat{C} = 120^\circ$.

c) $b = 4,5, \hat{A} = 30^\circ, \hat{C} = 75^\circ$.

d) $a = 137; \hat{B} = 83^\circ; \hat{C} = 57^\circ$

Bài 2: Giải tam giác ABC biết

a) $a = 6,3, b = 6,3, \hat{C} = 54^\circ$.

b) $b = 32, c = 45, \hat{A} = 87^\circ$.

c) $a = 7, b = 23, \hat{C} = 130^\circ$.

d) $b = 14; c = 10; \hat{A} = 145^\circ$

Bài 3: Giải tam giác ABC biết

$$a, a = 14; b = 18; c = 20$$

$$b, a = 4; b = 5; c = 7$$

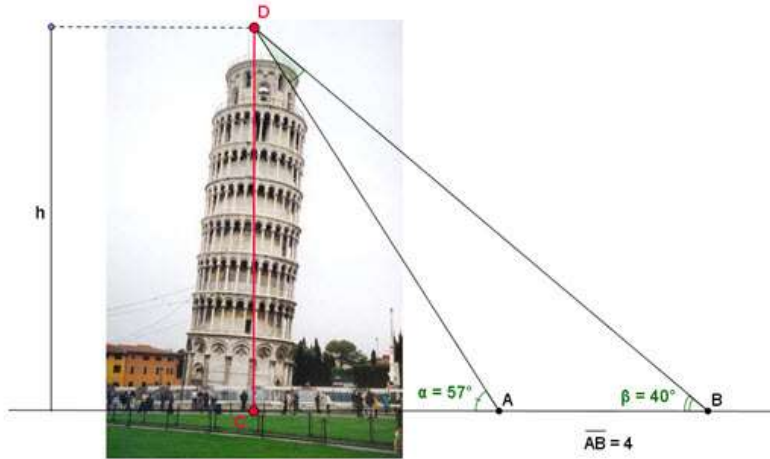
$$c, a = 6; b = 7,3; c = 4,8$$

DẠNG 3: ỨNG DỤNG GIẢI TAM GIÁC VÀO THỰC TẾ

Bài 1. Đo chiều cao của một cái tháp mà không thể đến được chân tháp.

Giả sử $CD = h$ là chiều cao của tháp trong đó C là chân tháp.

Chọn hai điểm A, B trên mặt đất sao cho ba điểm A, B và C thẳng hàng. Ta đo khoảng cách AB và các góc $\widehat{CAD}, \widehat{CBD}$. Chẳng hạn ta đo được $AB = 24\text{m}$ $\widehat{CAD} = \alpha = 57^\circ$; $\widehat{CBD} = 40^\circ$ Khi đó chiều cao h của tháp được tính như sau:



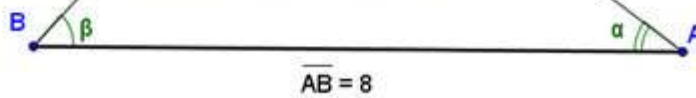
Hình 2. 21

$$\alpha = \widehat{D} + \beta \Rightarrow \widehat{D} = \alpha - \beta = 57^\circ - 40^\circ = 17^\circ$$

$$\frac{AD}{\sin \beta} = \frac{AB}{\sin D} \Rightarrow AD = \frac{AB \sin \beta}{\sin D}$$

Tam giác ADC vuông tại D có $h = CD = AD \cdot \sin \alpha$

Bài toán 2. Tính khoảng cách từ một địa điểm A trên bờ Hồ Gươm đến điểm C Tháp Rùa ở giữa hồ.



Hình 2.22

Để đo khoảng cách từ một điểm A đến C, người ta chọn một điểm B cùng ở trên bờ với A sao cho từ A và B có thể nhìn thấy điểm C. Ta đo khoảng cách AB, góc $\widehat{CBA} = \beta = 70^\circ$. Khi đó khoảng cách AC được tính như sau:

Áp dụng định lí sin vào tam giác ABC, ta có

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} \quad \text{Vì } \sin C = \sin(\alpha + \beta) \text{ nên}$$

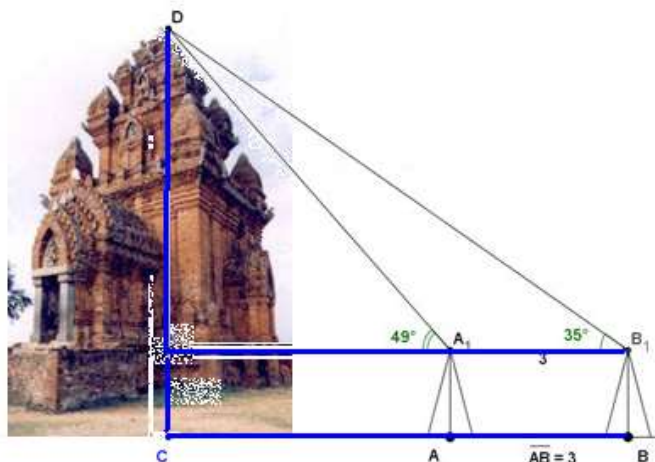
$$AC = \frac{AB \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{40 \cdot \sin 70^\circ}{\sin 115^\circ} \approx 41,47 \text{ (m)}. \text{ Vậy } AC \approx 41,47 \text{ (m)}.$$

Bài 3: Muốn đo chiều cao của Tháp Klong Garai ở Ninh Thuận, người ta và B trên mặt đất có khoảng cách AB thẳng hàng với chân C của tháp để (h.2.24). Chân của giác kế có chiều 1,3m. Gọi D là đỉnh tháp và hai điểm thẳng hàng với C1 thuộc chiều cao

Người ta đo được

Tính chiều cao CD của tháp đó.

Gợi ý : Giải tương tự như ví dụ tại



Chạm Por lấy hai điểm A = 12m cùng đặt hai giác kế cao h = A₁, b₁ cùng CD của tháp. $\widehat{DA_1C_1} = 49^\circ$ và $\widehat{DB_1C_1}$

Bài 1

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

- Câu 1.** Cho $\triangle ABC$ có $b=6, c=8, \hat{A}=60^\circ$. Độ dài cạnh a là:
A. $2\sqrt{13}$. B. $3\sqrt{12}$. C. $2\sqrt{37}$. D. $\sqrt{20}$.
- Câu 2.** Cho $\triangle ABC$ có $S=84, a=13, b=14, c=15$. Độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp R của tam giác trên là:
A. 8,125. B. 130. C. 8. D. 8,5.
- Câu 3.** Cho $\triangle ABC$ có $a=6, b=8, c=10$. Diện tích S của tam giác trên là:
A. 48. B. 24. C. 12. D. 30.
- Câu 4.** Cho $\triangle ABC$ vuông tại B và có $\hat{C}=25^\circ$. Số đo của góc A là:
A. $A=65^\circ$. B. $A=60^\circ$. C. $A=155^\circ$. D. $A=75^\circ$.
- Câu 5.** Cho $\triangle ABC$ có $\hat{B}=60^\circ, a=8, c=5$. Độ dài cạnh b bằng:
A. 7. B. 129. C. 49. D. $\sqrt{129}$.
- Câu 6.** Cho $\triangle ABC$ có $S=10\sqrt{3}$, nửa chu vi $p=10$. Độ dài bán kính đường tròn nội tiếp r của tam giác trên là:
A. 3. B. 2. C. $\sqrt{2}$. D. $\sqrt{3}$.
- Câu 7.** Cho $\triangle ABC$ có $a=4, c=5, \hat{B}=150^\circ$. Diện tích của tam giác là:
A. $5\sqrt{3}$. B. 5. C. 10. D. $10\sqrt{3}$.
- Câu 8.** Cho tam giác ABC có $b=7; c=5, \cos A=\frac{3}{5}$. Đường cao h_a của tam giác ABC là
A. $\frac{7\sqrt{2}}{2}$. B. 8. C. $8\sqrt{3}$. D. $80\sqrt{3}$.
- Câu 9.** Cho tam giác ABC , chọn công thức đúng trong các đáp án sau:
A. $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} + \frac{a^2}{4}$. B. $m_a^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$.
C. $m_a^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$. D. $m_a^2 = \frac{2c^2 + 2b^2 - a^2}{4}$.
- Câu 10.** Cho tam giác ABC . Tìm công thức sai:
A. $\frac{a}{\sin A} = 2R$. B. $\sin A = \frac{a}{2R}$. C. $b \sin B = 2R$. D. $\sin C = \frac{c \sin A}{a}$.
- Câu 11.** Chọn công thức đúng trong các đáp án sau:
A. $S = \frac{1}{2}bc \sin A$. B. $S = \frac{1}{2}ac \sin A$.
C. $S = \frac{1}{2}bc \sin B$. D. $S = \frac{1}{2}bc \sin B$.
- Câu 12.** Cho tam giác ABC có $a=8, b=10$, góc C bằng 60° . Độ dài cạnh c là ?
A. $c=3\sqrt{21}$. B. $c=7\sqrt{2}$. C. $c=2\sqrt{11}$. D. $c=2\sqrt{21}$.
- Câu 13.** Cho tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây là đúng ?
A. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}a.b.c$. B. $\frac{a}{\sin A} = R$.
C. $\cos B = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$. D. $m_c^2 = \frac{2b^2 + 2a^2 - c^2}{4}$.

Câu 14. Cho tam giác ABC , chọn công thức đúng ?

A. $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos C$.

B. $AB^2 = AC^2 - BC^2 + 2AC \cdot BC \cos C$.

C. $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos C$.

D. $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC + \cos C$.

Câu 15. Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức $b + c = 2a$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

A. $\cos B + \cos C = 2 \cos A$.

B. $\sin B + \sin C = 2 \sin A$.

C. $\sin B + \sin C = \frac{1}{2} \sin A$.

D. $\sin B + \cos C = 2 \sin A$.

Câu 16. Cho tam giác ABC . Đẳng thức nào sai ?

A. $\sin(A + B - 2C) = \sin 3C$.

B. $\cos \frac{B+C}{2} = \sin \frac{A}{2}$.

C. $\sin(A + B) = \sin C$.

D. $\cos \frac{A+B+2C}{2} = \sin \frac{C}{2}$.

Câu 17. Gọi $S = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2$ là tổng bình phương độ dài ba trung tuyến của tam giác ABC . Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng ?

A. $S = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$.

B. $S = a^2 + b^2 + c^2$.

C. $S = \frac{3}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$.

D. $S = 3(a^2 + b^2 + c^2)$.

Câu 18. Độ dài trung tuyến m_c ứng với cạnh c của ΔABC bằng biểu thức nào sau đây

A. $\frac{b^2 + a^2 - c^2}{2}$.

B. $\sqrt{\frac{b^2 + a^2 - c^2}{2}}$.

C. $\frac{1}{2} \sqrt{(2b^2 + 2a^2) - c^2}$.

D. $\sqrt{\frac{b^2 + a^2 - c^2}{4}}$.

Câu 19. Cho tam giác ABC có $a^2 + b^2 - c^2 > 0$. Khi đó :

A. Góc $C > 90^\circ$

B. Góc $C < 90^\circ$

C. Góc $C = 90^\circ$

D. Không thể kết luận được gì về góc C .

Câu 20. Một tam giác có ba cạnh là 13,14,15. Diện tích tam giác bằng bao nhiêu ?

A. 84.

B. $\sqrt{84}$.

C. 42.

D. $\sqrt{168}$.

Câu 21. Một tam giác có ba cạnh là 26,28,30. Bán kính đường tròn nội tiếp là:

A. 16.

B. 8.

C. 4.

D. $4\sqrt{2}$.

Câu 22. Một tam giác có ba cạnh là 52,56,60. Bán kính đường tròn ngoại tiếp là:

A. $\frac{65}{8}$.

B. 40.

C. 32,5.

D. $\frac{65}{4}$.

Câu 23. Tam giác với ba cạnh là 3,4,5. Có bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đó bằng bao nhiêu ?

A. 1.

B. $\sqrt{2}$.

C. $\sqrt{3}$.

D. 2.

Câu 24. Tam giác ABC có $a=6, b=4\sqrt{2}, c=2$. M là điểm trên cạnh BC sao cho $BM=3$. Độ dài đoạn AM bằng bao nhiêu ?

A. $\sqrt{9}$.

B. 9.

C. 3.

D. $\frac{1}{2}\sqrt{108}$.

Câu 25. Cho tam giác ABC có $a=4, b=6, c=8$. Khi đó diện tích của tam giác là:

A. $9\sqrt{15}$.

B. $3\sqrt{15}$.

C. 105.

D. $\frac{2}{3}\sqrt{15}$.

A. 29,9. B. 14,1. C. 17,5. D. 19,9.

Câu 41. Cho tam giác ABC , biết $a=24, b=13, c=15$. Tính góc A ?

A. $33^{\circ}34'$. B. $117^{\circ}49'$. C. $28^{\circ}37'$. D. $58^{\circ}24'$.

Câu 42. Tam giác ABC có $\hat{A}=68^{\circ}12', \hat{B}=34^{\circ}44', AB=117$. Tính AC ?

A. 68. B. 168. C. 118. D. 200.

Câu 43. Tam giác ABC có $a=8, c=3, \hat{B}=60^{\circ}$. Độ dài cạnh b bằng bao nhiêu ?

A. 49. B. $\sqrt{97}$ C. 7. D. $\sqrt{61}$.

Câu 44. Cho tam giác ABC , biết $a=13, b=14, c=15$. Tính góc B ?

A. $59^{\circ}49'$. B. $53^{\circ}7'$. C. $59^{\circ}29'$. D. $62^{\circ}22'$.