

## ○ Bài 01

## NGUYÊN HÀM

## A. Lý thuyết

## 1. Định nghĩa

Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên khoảng  $K$ . Hàm số  $F(x)$  được gọi là nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  nếu  $F'(x) = f(x)$  với mọi  $x \in K$ .

Nhận xét. Nếu  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x)$  thì  $F(x) + C$ , ( $C \in \mathbb{R}$ ) cũng là nguyên hàm của  $f(x)$ .

Ký hiệu:  $\int f(x) dx = F(x) + C$ .

## 2. Tính chất

- $\left(\int f(x) dx\right)' = f(x)$ .
- $\int a \cdot f(x) dx = a \cdot \int f(x) dx$  ( $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ ).
- $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$ .

## 3. Bảng nguyên hàm của một số hàm số thường gặp

Bảng nguyên hàm	
$\int k dx = kx + C$ , $k$ là hằng số	
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ ( $\alpha \neq -1$ )	$\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + C$	$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b  + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \cdot \ln a} + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C$

## B. Ví dụ áp dụng

**Ví dụ 1:** Tìm nguyên hàm các hàm số sau:

a)  $f(x) = x^3 - 3x + \frac{1}{x}$

b)  $f(x) = 2^x + 3^x$

c)  $f(x) = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt[3]{x}}$

d)  $f(x) = \frac{2^x - 1}{e^x}$

e)  $f(x) = \sin 5x \cdot \cos 3x$

f)  $f(x) = \frac{1}{(1+x)(1-2x)}$

g)  $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$

h)  $f(x) = e^{3-2x}$

**Giải**

a)  $\int (x^3 - 3x + \frac{1}{x}) dx = \int x^3 dx - 3 \int x dx + \int \frac{1}{x} dx = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 + \ln|x| + C$

b)  $\int (2^x + 3^x) dx = \int 2^x dx + \int 3^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{3^x}{\ln 3} + C$

c)  $\int \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt[3]{x}} dx = \frac{3}{4}x^{\frac{5}{3}} + \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C$

d)  $\int \frac{2^x - 1}{e^x} dx = \int \frac{2^x}{e^x} dx - \int \left(\frac{1}{e}\right)^x dx = \frac{2^x + \ln 2 - 1}{e^x(\ln 2 - 1)} + C$

e)  $\int \sin 5x \cdot \cos 3x dx = -\frac{1}{3} \left( \frac{1}{4} \cos 8x + \cos 2x \right) + C$

f)  $\int \frac{1}{(1+x)(1-2x)} dx = \int \frac{1}{3} \left( \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1-2x} \right) dx = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{1+x}{1-2x} \right| + C$

g)  $\int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \left( \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = \cot 2x + C$

g)  $\int e^{3-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{3-2x} + C$

**Ví dụ 2: Tìm hàm số f(x) biết:**

a)  $f'(x) = 1 + \sin 3x, f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$

b)  $f'(x) = 2 - x^2, f(2) = \frac{7}{3}$

**Giải**

a) Ta có  $f(x) = x - \frac{1}{3} \cos 3x + C$ . Do  $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} \cos \frac{\pi}{2} + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{\pi}{6}$ .

Vậy nguyên hàm cần tìm là:  $f(x) = x - \frac{1}{3} \cos 3x - \frac{\pi}{6}$

b) Ta có  $f(x) = \int (2 - x^2) dx = 2x - \frac{x^3}{3} + C$ . Do  $f(2) = \frac{7}{3}$  nên ta có  $C=1$ . Vậy  $f(x) = 2x - \frac{x^3}{3} + 1$ .

**C. Bài tập tự luận**

**Bài 1.** Tìm nguyên hàm  $F(x)$  của các hàm số  $f(x)$  sau:

a)  $f(x) = x^3 - 3x + \frac{1}{x}$       b)  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + 4x^3 + \sqrt[3]{x^2} + x - 2$       c)  $f(x) = (5x+3)^5$

d)  $f(x) = \sin^4 x \cdot \cos x$       e)  $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} + 3^x - \tan x + 3x - 2$       f)  $f(x) = 2^x + 3^x$

**Bài 2.** Tìm nguyên hàm  $F(x)$  của các hàm số  $f(x)$  sau:

a)  $f(x) = x^2 - 3x + \frac{1}{x}$       b)  $f(x) = \frac{2x^4 + 3}{x^2}$       c)  $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$

d)  $f(x) = \frac{(x^2-1)^2}{x^2}$       e)  $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}$       f)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$

**Bài 3.** Tìm nguyên hàm  $F(x)$  của các hàm số  $f(x)$  sau:

- a)  $f(x) = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$                       b)  $f(x) = \tan^2 x$                       c)  $f(x) = \cos^2 x$   
 d)  $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$                       e)  $f(x) = \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$                       f)  $f(x) = 2 \sin 3x \cos 2x$

**Bài 4.** Tìm các nguyên hàm sau:

- a)  $\int \left( \frac{(1-x)^3}{\sqrt[3]{x}} \right) dx$                       b)  $\int (\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x^3} + \sqrt[5]{x^4}) dx$                       c)  $\int \sqrt{x} \sqrt{x} \sqrt{x} dx$   
 d)  $\int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx$                       e)  $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx$                       f)  $\int \left( 2\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} \right) dx$   
 g)  $\int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{\sqrt[3]{x}} dx$                       h)  $\int \frac{1}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}} dx$                       i)  $\int \frac{1}{\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1}} dx$

**Bài 5.** Tìm các nguyên hàm sau:

- a)  $\int e^{3x+1} dx$                       b)  $\int e^x (e^x - 1) dx$                       c)  $\int 3^{x+2} \cdot 2^{2x+1} dx$   
 d)  $\int (3^x + 5^x)^2 dx$                       e)  $\int e^{3x} \cdot 3^x dx$                       f)  $\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx$   
 g)  $\int (e^x + e^{-x})^2 dx$                       h)  $\int e^x \left( 2 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right) dx$                       i)  $\int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dx$

**Bài 6.** Tìm nguyên hàm  $F(x)$  của các hàm số  $f(x)$  với:

- a)  $f(x) = x^3 - 4x + 5$  biết  $F(1) = 3$                       b)  $f(x) = 3 - 5 \cos x$  biết  $F(\pi) = 2$   
 c)  $f(x) = \frac{3 - 5x^2}{x}$  biết  $F(e) = 1$                       d)  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$  biết  $F(1) = \frac{3}{2}$   
 e)  $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2}$  biết  $F(-2) = 0$                       f)  $f(x) = x\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$  biết  $F(1) = -2$   
 g)  $f(x) = \sin 2x \cdot \cos x$  biết  $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$                       h)  $f(x) = \frac{x^3 + 3x^3 + 3x - 7}{(x+1)^2}$  biết  $F(0) = 8$   
 i)  $f(x) = \sin^2 \frac{x}{2}$  biết  $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$                       j)  $f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 + 3x - 1}{x^2 + 2x + 1}$ , biết  $F(1) = \frac{1}{3}$

**Bài 7.** Chứng minh  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  với:

- a)  $F(x) = (4x - 5)e^x$  và  $f(x) = (4x - 1)e^x$ .  
 b)  $F(x) = \ln \left( \frac{x^2 + 4}{x^2 + 3} \right)$  và  $f(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 4)(x^2 + 3)}$ .  
 c)  $F(x) = \ln \frac{x^2 - x\sqrt{2} + 1}{x^2 + x\sqrt{2} + 1}$  và  $f(x) = \frac{2\sqrt{2}(x^2 - 1)}{x^4 + 1}$ .  
 d)  $F(x) = \tan^4 x + 3x - 5$  và  $f(x) = 4 \tan^5 x + 4 \tan^3 x + 3$ .

**D. Bài tập trắc nghiệm**

**Câu 1.** Hàm số  $f(x)$  có nguyên hàm trên  $K$  nếu:

- A.  $f(x)$  xác định trên  $K$ .                      B.  $f(x)$  có giá trị lớn nhất trên  $K$ .  
 C.  $f(x)$  có giá trị nhỏ nhất trên  $K$ .                      D.  $f(x)$  liên tục trên  $K$ .

**Câu 2.** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A.  $F(x) = x^2$  là một nguyên hàm của  $f(x) = 2x$ .

B.  $F(x) = x$  là một nguyên hàm của  $f(x) = 2\sqrt{x}$ .

C. Nếu  $F(x)$  và  $G(x)$  đều là nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  thì  $F(x) - G(x) = C$  (hằng số).

D.  $\int [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx$ .

**Câu 3.** Các khẳng định nào sau đây là sai?

A.  $\int f(x) dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(t) dt = F(t) + C$ .

B.  $\left[ \int f(x) dx \right]' = f(x)$ .

C.  $\int f(x) dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(u) dx = F(u) + C$ .

D.  $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$  ( $k$  là hằng số).

**Câu 4.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{5x-2}$

A.  $\int \frac{dx}{5x-2} = \frac{1}{5} \ln|5x-2| + C$ .

B.  $\int \frac{dx}{5x-2} = -\frac{1}{2} \ln(5x-2) + C$ .

C.  $\int \frac{dx}{5x-2} = 5 \ln|5x-2| + C$ .

D.  $\int \frac{dx}{5x-2} = \ln|5x-2| + C$ .

**Câu 5.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 7^x$ .

A.  $\int 7^x dx = 7^x \ln 7 + C$

B.  $\int 7^x dx = \frac{7^x}{\ln 7} + C$

C.  $\int 7^x dx = 7^{x+1} + C$

D.  $\int 7^x dx = \frac{7^{x+1}}{x+1} + C$

**Câu 6.** Nếu  $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + e^x + C$  thì  $f(x)$  bằng:

A.  $f(x) = \frac{x^4}{3} + e^x$ .

B.  $f(x) = 3x^2 + e^x$

C.  $f(x) = \frac{x^4}{12} + e^x$ .

D.  $f(x) = x^2 + e^x$ .

**Câu 7.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \cos 3x$

A.  $\int \cos 3x dx = 3 \sin 3x + C$ .

B.  $\int \cos 3x dx = \frac{\sin 3x}{3} + C$ .

C.  $\int \cos 3x dx = -\frac{\sin 3x}{3} + C$ .

D.  $\int \cos 3x dx = \sin 3x + C$ .

**Câu 8.** Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = e^x + 2x$  thỏa mãn  $F(0) = \frac{3}{2}$ . Tìm  $F(x)$ .

A.  $F(x) = e^x + x^2 + \frac{3}{2}$

B.  $F(x) = 2e^x + x^2 - \frac{1}{2}$

C.  $F(x) = e^x + x^2 + \frac{5}{2}$

D.  $F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}$

**Câu 9.** Tìm nguyên hàm  $F(x)$  của hàm số  $f(x) = \sin x + \cos x$  thỏa mãn  $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ .

A.  $F(x) = \cos x - \sin x + 3$

B.  $F(x) = -\cos x + \sin x + 3$

C.  $F(x) = -\cos x + \sin x - 1$

D.  $F(x) = -\cos x + \sin x + 1$

**Câu 10.** Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \sin(x + \pi)$  là:

- A.  $\int f(x)dx = -\cos x + C$                       B.  $\int f(x)dx = \cos x + C$   
 C.  $\int f(x)dx = \cos(x + \pi) + C$                       D.  $\int f(x)dx = \sin x + C$

**Câu 11.** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A.  $\int 0dx = C$  ( $C$  là hằng số).                      B.  $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$  ( $C$  là hằng số).  
 C.  $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$  ( $C$  là hằng số).                      D.  $\int dx = x + C$  ( $C$  là hằng số).

**Câu 12.** Hàm số nào dưới đây không là nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{x(2+x)}{(x+1)^2}$ ?

- A.  $\frac{x^2}{x+1}$ .                      B.  $\frac{x^2+x-1}{x+1}$ .                      C.  $\frac{x^2-x-1}{x+1}$ .                      D.  $\frac{x^2+x+1}{x+1}$ .

**Câu 13.** Một nguyên hàm của hàm số  $y = f(x) = \frac{(x-1)^3}{2x^2}$  là kết quả nào sau đây?

- A.  $F(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{3x}{2} + \ln|x| + \frac{1}{2x}$ .                      B.  $F(x) = \frac{3(x-1)^4}{4x^3}$ .  
 C.  $F(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{3x}{2} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^3}$ .                      D. Một kết quả khác.

**Câu 14.** Tính  $\int e^x \cdot e^{x+1} dx$  ta được kết quả nào sau đây?

- A.  $e^x \cdot e^{x+1} + C$ .                      B.  $\frac{1}{2} e^{2x+1} + C$ .                      C.  $2e^{2x+1} + C$ .                      D. Một kết quả khác.

**Câu 15.** Hàm số nào sau đây không phải là nguyên hàm của hàm số  $f(x) = (x-3)^4$ ?

- A.  $F(x) = \frac{(x-3)^5}{5} + x$ .                      B.  $F(x) = \frac{(x-3)^5}{5}$ .  
 C.  $F(x) = \frac{(x-3)^5}{5} + 2017$ .                      D.  $F(x) = \frac{(x-3)^5}{5} - 1$ .

**Câu 16.** Hàm số  $F(x) = e^{x^3}$  là một nguyên hàm của hàm số:

- A.  $f(x) = e^{x^3}$ .                      B.  $f(x) = 3x^2 \cdot e^{x^3}$ .                      C.  $f(x) = \frac{e^{x^3}}{3x^2}$ .                      D.  $f(x) = x^3 \cdot e^{x^3-1}$ .

**Câu 17.** Cho  $I = \int 2^{\sqrt{x}} \frac{\ln 2}{\sqrt{x}} dx$ . Khi đó kết quả nào sau đây là sai?

- A.  $I = 2^{\sqrt{x}} + C$ .                      B.  $I = 2^{\sqrt{x}+1} + C$ .                      C.  $I = 2(2^{\sqrt{x}} + 1) + C$ .                      D.  $I = 2(2^{\sqrt{x}} - 1) + C$ .

**Câu 18.** Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x) = \frac{1}{x+1}$  và  $F(2)=1$  khi đó  $F(8)$  bằng:

- A.  $\ln 3$                       B.  $\ln 3 + 1$                       C.  $\ln 3 + 2$                       D.  $\ln 3 + 3$

**Câu 19.** Nếu  $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + e^x + C$  thì  $f(x)$  bằng:

- A.  $f(x) = \frac{x^4}{3} + e^x$ .                      B.  $f(x) = 3x^2 + e^x$ .                      C.  $f(x) = \frac{x^4}{12} + e^x$ .                      D.  $f(x) = x^2 + e^x$ .

**Câu 20.** Nếu  $\int f(x)dx = \sin 2x \cos x$  thì  $f(x)$  là:

A.  $f(x) = \frac{1}{2}(3\cos 3x + \cos x)$ .

B.  $f(x) = \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos x)$ .

C.  $f(x) = \frac{1}{2}(3\cos 3x - \cos x)$ .

D.  $f(x) = \frac{1}{2}(\cos 3x - \cos x)$ .

**Câu 21.** Nếu  $\int f(x)dx = \frac{1}{x} + \ln x + C$  thì  $f(x)$  là:

A.  $f(x) = \sqrt{x} + \ln x + C$ .

B.  $f(x) = -\sqrt{x} + \frac{1}{x} + C$ .

C.  $f(x) = -\frac{1}{x^2} + \ln x + C$ .

D.  $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$ .

**Câu 22.** Cặp hàm số nào sau đây có tính chất: Có một hàm số là nguyên hàm của hàm số còn lại?

A.  $f(x) = \sin 2x$  và  $g(x) = \cos^2 x$ .

B.  $f(x) = \tan^2 x$  và  $g(x) = \frac{1}{\cos^2 x^2}$ .

C.  $f(x) = e^x$  và  $g(x) = e^{-x}$ .

D.  $f(x) = \sin 2x$  và  $g(x) = \sin^2 x$ .

**Câu 23.** Tìm số thực  $m$  để hàm số  $F(x) = mx^3 + (3m+2)x^2 - 4x + 3$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 3x^2 + 10x - 4$ .

A.  $m = -1$ .

B.  $m = 0$ .

C.  $m = 1$ .

D.  $m = 2$ .

**Câu 24.** Cho hàm số  $f(x) = x^2 \cdot e^x$ . Tìm  $a, b, c$  để  $F(x) = (ax^2 + bx + c) \cdot e^x$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$ .

A.  $(a; b; c) = (1; 2; 0)$ .

B.  $(a; b; c) = (1; -2; 0)$ .

C.  $(a; b; c) = (-1; 2; 0)$ .

D.  $(a; b; c) = (2; 1; 0)$ .

**Câu 25.** Để  $F(x) = (a \cos x + b \sin x) e^x$  là một nguyên hàm của  $f(x) = e^x \cos x$  thì giá trị của  $a, b$  là:

A.  $a = 1, b = 0$ .

B.  $a = 0, b = 1$ .

C.  $a = b = 1$ .

D.  $a = b = \frac{1}{2}$ .

**Câu 26.** Giả sử hàm số  $f(x) = (ax^2 + bx + c) \cdot e^{-x}$  là một nguyên hàm của hàm số  $g(x) = x(1-x) e^{-x}$ .

Tính tổng  $A = a + b + c$ , ta được:

A.  $A = -2$ .

B.  $A = 4$ .

C.  $A = 1$ .

D.  $A = 3$ .

**Câu 27.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm là  $f'(x) = \frac{1}{2x-1}$  và  $f(1) = 1$  thì  $f(5)$  có giá trị bằng:

A.  $\ln 2$ .

B.  $\ln 3$ .

C.  $\ln 2 + 1$ .

D.  $\ln 3 + 1$ .

**Câu 28.** Với giá trị nào của  $a, b, c, d$  thì  $F(x) = (ax+b) \cdot \cos x + (cx+d) \cdot \sin x$  là một nguyên hàm của  $f(x) = x \cos x$ ?

A.  $a = b = 1, c = d = 0$ .

B.  $a = d = 0, b = c = 1$ .

C.  $a = 1, b = 2, c = -1, d = -2$ .

D. Kết quả khác.

**Câu 29.** Một nguyên hàm  $F(x)$  của hàm số  $f(x) = \sin^2 x$  là kết quả nào sau đây, biết nguyên hàm này bằng  $\frac{\pi}{8}$  khi  $x = \frac{\pi}{4}$ ?

A.  $F(x) = \frac{\sin^3 x}{3}$ .

B.  $F(x) = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}$ .

C.  $F(x) = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{1}{4}$ .

D.  $F(x) = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sqrt{2}}{12}$ .

**Câu 30.** Cho các hàm số  $f(x) = \frac{20x^2 - 30x + 7}{\sqrt{2x - 3}}$ ;  $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{2x - 3}$  với  $x > \frac{3}{2}$ . Để hàm số

$F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  thì giá trị của  $a, b, c$  là:

**A.**  $a = 4, b = 2, c = 1$ . **B.**  $a = 4, b = -2, c = -1$ .

**C.**  $a = 4, b = -2, c = 1$ . **D.**  $a = 4, b = 2, c = -1$ .

## ○ Bài 02

# PHƯƠNG PHÁP TÌM NGUYÊN HÀM

### A. Lý thuyết

#### 1. Phương pháp đổi biến số

Nếu  $\int f(x)dx = F(x) + C$  thì  $\int f[u(x)]u'(x)dx = F[u(x)] + C$ .

Giả sử ta cần tìm họ nguyên hàm  $I = \int f(x)dx$ , trong đó ta có thể phân tích  $f(x) = g(u(x))u'(x)$  thì ta thực hiện phép đổi biến số  $t = u(x)$ , suy ra  $dt = u'(x)dx$ .

Khi đó ta được nguyên hàm:  $\int g(t)dt = G(t) + C = G[u(x)] + C$ .

*Chú ý:* Sau khi tìm được họ nguyên hàm theo  $t$  thì ta phải thay  $t = u(x)$ .

#### 2. Phương pháp lấy nguyên hàm từng phần

Cho hai hàm số  $u$  và  $v$  liên tục trên đoạn  $[a; b]$  và có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[a; b]$ .

Khi đó:  $\int u dv = uv - \int v du$ . (\*)

Để tính nguyên hàm  $\int f(x)dx$  bằng từng phần ta làm như sau:

**Bước 1.** Chọn  $u, v$  sao cho  $f(x)dx = u dv$  (chú ý  $dv = v'(x)dx$ ).

Sau đó tính  $v = \int dv$  và  $du = u'.dx$ .

**Bước 2.** Thay vào công thức (\*) và tính  $\int v du$ .

*Chú ý.* Cần phải lựa chọn  $u$  và  $dv$  hợp lí sao cho ta dễ dàng tìm được  $v$  và tích phân  $\int v du$  để tính hơn  $\int u dv$ . Ta thường gặp các dạng sau

• **Dạng 1.**  $I = \int P(x) \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} dx$ , trong đó  $P(x)$  là đa thức. Với dạng này, ta đặt  $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} dx \end{cases}$ .

• **Dạng 2.**  $I = \int P(x)e^{ax+b} dx$ , trong đó  $P(x)$  là đa thức. Với dạng này, ta đặt  $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = e^{ax+b} dx \end{cases}$ .

• **Dạng 3.**  $I = \int P(x)\ln(mx+n) dx$ , trong đó  $P(x)$  là ĐT. Với dạng này, ta đặt  $\begin{cases} u = \ln(mx+n) \\ dv = P(x) dx \end{cases}$ .

• **Dạng 4.**  $I = \int \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} e^x dx$ . Với dạng này, ta đặt  $\begin{cases} u = \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} \\ dv = e^x dx \end{cases}$ .

### B. Ví dụ áp dụng

**Ví dụ 1.** Tìm các nguyên hàm sau bằng phép đổi biến số

a)  $\int \sin(3x-1)dx$

b)  $\int \frac{x}{(x+1)^5} dx$

c)  $\int \tan x dx$

d)  $\int 2x\sqrt{x^2+1} dx$

f)  $\int x.e^{x^2+1} dx$

g)  $\int \frac{dx}{(\sqrt{1+x^2})^3}$

Giải

a) Đặt  $t = 3x-1$  ta có  $dt = 3dx$ . Khi đó  $\int \sin(3x-1)dx = \frac{1}{3} \int \sin t dt = -\frac{1}{3} \cos t + C$



Thay,  $t = 3x - 1$  ta được  $\int \sin(3x - 1) dx = -\frac{1}{3} \cos(3x - 1) + C$ .

b) Đặt  $t = x + 1$ , ta được  $\int \frac{x}{(x+1)^5} dx = \int \frac{t-1}{t^5} dt = -\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{4t^4} + C = \frac{1}{(x+1)^3} \left( \frac{1}{4(x+1)} - \frac{1}{3} \right) + C$

c) Đặt  $t = \cos x$  ta được  $\int \tan x dx = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C$

d) Đặt  $t = \sqrt{x^2 + 1}$  ta được  $\int 2x\sqrt{x^2 + 1} dx = \int 2t^2 dt = \frac{2}{3} t^3 + C = \frac{2}{3} (\sqrt{x^2 + 1})^3 + C$

f) Đặt  $t = x^2 + 1$  ta được  $\int x.e^{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + C = \frac{1}{2} e^{x^2+1} + C$

g) Đặt  $x = \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  ta được  $\int \frac{dx}{(\sqrt{1+x^2})^3} = \int \cos t dt = \sin t + C = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$

### Ví dụ 2. Tìm nguyên hàm bằng phương pháp nguyên hàm từng phần

a)  $\int (x-1)e^x dx$

b)  $\int (x+1) \sin x dx$

c)  $\int x^2 \ln x dx$

d)  $\int e^x \cos x dx$

Giải

a)  $\int (x-1)e^x dx$ . Đặt  $\begin{cases} u = x-1 \\ e^x dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$ . Theo công thức tính nguyên hàm từng phần ta có:

$$\int (x-1)e^x dx = (x-1)e^x - \int e^x dx = (x-1)e^x - e^x + C = (x-2)e^x + C.$$

b)  $\int (x+1) \sin x dx$ . Đặt  $\begin{cases} u = x+1 \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

$$\Rightarrow \int (x+1) \sin x dx = -(x+1) \cos x + \int \cos x dx = -(x+1) \cos x + \sin x + C$$

c)  $\int x^2 \ln x dx$ . Đặt  $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{x^3}{3} \end{cases} \Rightarrow \int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C$

d)  $I = \int e^x \sin x dx$ . Đặt  $\begin{cases} u = e^x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = -\cos x \end{cases} \Rightarrow \int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int \cos x e^x dx$

Tính  $J = \int e^x \cos x dx$ , Đặt  $\begin{cases} u = e^x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = \sin x \end{cases} \Rightarrow J = e^x \sin x - I$

Vậy  $I = -e^x \cos x + e^x \sin x - I \Rightarrow I = \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2} + C$

### Ví dụ 3. Nguyên hàm của hàm ẩn

a) Cho  $F(x) = x^2$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)e^{2x}$ . Tìm nguyên hàm của hàm số  $f'(x)e^{2x}$

b) Cho hàm số  $f'(x)$  thỏa mãn  $f(2) = -\frac{1}{25}$  và  $f'(x) = 4x^3 \cdot [f(x)]^2$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Tính  $f(1)$

Giải.

a)  $\int f'(x)e^{2x} dx$ . Đặt  $\begin{cases} u = e^{2x} \\ f'(x) dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2e^{2x} dx \\ v = f(x) \end{cases}$ ,

khí đó  $\int f'(x)e^{2x} dx = e^{2x} \cdot f(x) - \int 2e^{2x} f(x) dx = e^{2x} \cdot f(x) - 2x^2$ .

Ngoài ra theo giả thiết, ta có  $F(x) = x^2 = \int f(x)e^{2x}$  suy ra  $f(x)e^{2x} = F'(x) = 2x$

Vậy  $\int f'(x)e^{2x} dx = 2x - 2x^2 + C$ .

b) Ta có  $f'(x) = 4x^3 \cdot [f(x)]^2 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = 4x^3$ .

Lấy nguyên hàm hai vế ta có  $\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} dx = \int 4x^3 dx \Leftrightarrow \frac{f^{-1}(x)}{-1} = x^4 + C$ .

Thay  $x = 2$  vào hai vế ta có:  $\frac{-1}{-1} = 16 + C \Leftrightarrow C = 9$ .

Vậy  $-\frac{1}{f(x)} = x^4 + 9$ , do đó  $-\frac{1}{f(1)} = 1 + 9 = 10 \Leftrightarrow f(1) = -\frac{1}{10}$ .

### C. Bài tập tự luận

Bài 1. Tìm các nguyên hàm sau: (đổi biến dạng 1)

a)  $\int x^2(1-x)^9 dx$     b)  $\int \frac{x^2}{(3x+1)^3} dx$     c)  $\int (2x^2+1)^7 x dx$     d)  $\int \frac{x}{x^2+5} dx$

e)  $\int \sqrt{x^2+1} \cdot x dx$     f)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$     g)  $\int (x^3+5)^4 x^2 dx$     h)  $\int \frac{3x^2}{\sqrt{5+2x^3}} dx$

i)  $\int \sin^4 x \cos x dx$     j)  $\int \frac{\sin x}{\cos^5 x} dx$     k)  $\int \frac{\tan x dx}{\cos^2 x}$     l)  $\int e^{3\sin x} \cdot \cos x dx$

Bài 2. Tìm các nguyên hàm sau: (đổi biến dạng 2)

a)  $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$     b)  $\int \sqrt{1-x^2} \cdot dx$     c)  $\int \frac{dx}{1+x^2}$     d)  $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$

e)  $\int x^3 \sqrt{x^2+1} \cdot dx$     f)  $\int \sqrt{4-x^2} \cdot dx$     g)  $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}$     h)  $\int \frac{dx}{4+x^2}$

Bài 3. Tìm các nguyên hàm sau: (Nguyên hàm từng phần)

a)  $\int x \sin^2 x dx$     b)  $\int (x^3 - x^2 + 2x - 3) \sin x dx$     c)  $\int e^{2x} \sin^2 x dx$

d)  $\int x e^{3x} dx$     e)  $\int x^2 e^{2x} dx$     f)  $\int (x^2 - 2x) \ln x dx$

Bài 4. Tìm các nguyên hàm sau: (Kết hợp đổi biến và từng phần)

a)  $\int \frac{e^x}{x^3} dx$     b)  $\int (2-3\sqrt{x}) \sin \sqrt{x} dx$     c)  $\int \frac{2x-1}{\sin^2 x} dx$     d)  $\int \frac{1-x}{\cos^2 x} dx$

e)  $\int \sin(\ln x) dx$     f)  $\int x \cdot \sin \sqrt{x} dx$     g)  $\int \cos x \cdot \ln(\cot x) dx$     h)  $\int \sin \sqrt[3]{x} dx$

i)  $\int e^{\sqrt{x-1}} dx$     j)  $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$     k)  $\int \sin \frac{x}{2} \cdot \ln\left(\tan \frac{x}{2}\right) dx$     l)  $\int (x-1) \cdot \cot^2 \frac{x}{2} dx$

## D. Bài tập trắc nghiệm

**Câu 1.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \sqrt{2x-1}$ .

- A.  $\int f(x)dx = \frac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$ .    B.  $\int f(x)dx = \frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$ .  
C.  $\int f(x)dx = -\frac{1}{3}\sqrt{2x-1} + C$ .    D.  $\int f(x)dx = \frac{1}{2}\sqrt{2x-1} + C$ .

**Câu 2.** Để tính  $\int \frac{e^{\ln x}}{x} dx$  theo phương pháp đổi biến số, ta đặt:

- A.  $t = e^{\ln x}$ .    B.  $t = \ln x$ .    C.  $t = x$ .    D.  $t = \frac{1}{x}$ .

**Câu 3.**  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $y = xe^{x^2}$ . Hàm số nào sau đây không phải là  $F(x)$ :

- A.  $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + 2$ .    B.  $F(x) = \frac{1}{2}(e^{x^2} + 5)$ .  
C.  $F(x) = -\frac{1}{2}e^{x^2} + C$ .    D.  $F(x) = -\frac{1}{2}(2 - e^{x^2})$ .

**Câu 4.**  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $y = \frac{\ln x}{x}$ . Nếu  $F(e^2) = 4$  thì  $\int \frac{\ln x}{x} dx$  bằng:

- A.  $F(x) = \frac{\ln^2 x}{2} + C$ .    B.  $F(x) = \frac{\ln^2 x}{2} + 2$ .  
C.  $F(x) = \frac{\ln^2 x}{2} - 2$ .    D.  $F(x) = \frac{\ln^2 x}{2} + x + C$ .

**Câu 5.**  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $y = e^{\sin x} \cos x$ .

Nếu  $F(\pi) = 5$  thì  $\int e^{\sin x} \cos x dx$  bằng:

- A.  $F(x) = e^{\sin x} + 4$ .    B.  $F(x) = e^{\sin x} + C$ .  
C.  $F(x) = e^{\cos x} + 4$ .    D.  $F(x) = e^{\cos x} + C$ .

**Câu 6.**  $F(x)$  là nguyên hàm của hàm số  $y = \sin^4 x \cos x$ .

$F(x)$  là hàm số nào sau đây?

- A.  $F(x) = \frac{\cos^5 x}{5} + C$ .    B.  $F(x) = \frac{\cos^4 x}{4} + C$ .  
C.  $F(x) = \frac{\sin^4 x}{4} + C$ .    D.  $F(x) = \frac{\sin^5 x}{5} + C$ .

**Câu 7.** Xét các mệnh đề sau, với  $C$  là hằng số:

- (I)  $\int \tan x dx = -\ln(\cos x) + C$ .  
(II)  $\int e^{3\cos x} \sin x dx = -\frac{1}{3}e^{3\cos x} + C$ .  
(III)  $\int \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{\sin x - \cos x}} dx = 2\sqrt{\sin x - \cos x} + C$ .

Số mệnh đề đúng là:

- A. 0.    B. 1.    C. 2.    D. 3.

**Câu 8.** Để tính  $\int x \ln(2+x) dx$  theo phương pháp tính nguyên hàm từng phần, ta đặt:

A.  $\begin{cases} u = x \\ dv = \ln(2+x)dx \end{cases}$

B.  $\begin{cases} u = \ln(2+x) \\ dv = xdx \end{cases}$

C.  $\begin{cases} u = x \ln(2+x) \\ dv = dx \end{cases}$

D.  $\begin{cases} u = \ln(2+x) \\ dv = dx \end{cases}$

**Câu 9.** Để tính  $\int x^2 \cos x dx$  theo phương pháp tích nguyên hàm từng phần, ta đặt:

A.  $\begin{cases} u = x \\ dv = x \cos x dx \end{cases}$

B.  $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = \cos x dx \end{cases}$

C.  $\begin{cases} u = \cos x \\ dv = x^2 dx \end{cases}$

D.  $\begin{cases} u = x^2 \cos x \\ dv = dx \end{cases}$

**Câu 10.** Kết quả của  $I = \int xe^x dx$  là:

A.  $I = e^x + xe^x + C$ .

B.  $I = \frac{x^2}{2} e^x + C$ .

C.  $I = xe^x - e^x + C$ .

D.  $I = \frac{x^2}{2} e^x + e^x + C$ .

**Câu 11.** Hàm số  $f(x) = (x-1)e^x$  có một nguyên hàm  $F(x)$  là kết quả nào sau đây, biết nguyên hàm này bằng 1 khi  $x=0$ ?

A.  $F(x) = (x-1)e^x$ .

B.  $F(x) = (x-2)e^x$ .

C.  $F(x) = (x+1)e^x + 1$ .

D.  $F(x) = (x-2)e^x + 3$ .

**Câu 12.** Một nguyên hàm của  $f(x) = x \ln x$  là kết quả nào sau đây, biết nguyên hàm này triệt tiêu khi  $x=1$ ?

A.  $F(x) = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} (x^2 + 1)$ .

B.  $F(x) = \frac{1}{2} x^2 \ln x + \frac{1}{4} x + 1$ .

C.  $F(x) = \frac{1}{2} x \ln x + \frac{1}{2} (x^2 + 1)$ .

D. Một kết quả khác.

**Câu 13.** Tính nguyên hàm  $I = \int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$  được kết quả nào sau đây?

A.  $I = \ln x \cdot \ln(\ln x) + C$ .

B.  $I = \ln x \cdot \ln(\ln x) + \ln x + C$ .

C.  $I = \ln x \cdot \ln(\ln x) - \ln x + C$ .

D.  $I = \ln(\ln x) + \ln x + C$ .

**Câu 14.** Tính nguyên hàm  $I = \int \sin x \cdot e^x dx$ , ta được:

A.  $I = \frac{1}{2} (e^x \sin x - e^x \cos x) + C$ .

B.  $I = \frac{1}{2} (e^x \sin x + e^x \cos x) + C$ .

C.  $I = e^x \sin x + C$ .

D.  $I = e^x \cos x + C$ .

**Câu 15.** Cho  $F(x) = (x-1)e^x$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)e^{2x}$ . Tìm nguyên hàm của hàm số  $f'(x)e^{2x}$ .

A.  $\int f'(x)e^{2x} dx = (4-2x)e^x + C$

B.  $\int f'(x)e^{2x} dx = \frac{2-x}{2} e^x + C$

C.  $\int f'(x)e^{2x} dx = (2-x)e^x + C$

D.  $\int f'(x)e^{2x} dx = (x-2)e^x + C$

**Câu 16.** Cho  $F(x) = -\frac{1}{3x^2}$  là một nguyên hàm của hàm số  $\frac{f(x)}{x}$ . Tìm nguyên hàm của hàm số  $f'(x) \ln x$ .

A.  $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{5x^5} + C$

B.  $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} - \frac{1}{5x^5} + C$

$$C. \int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$$

$$D. \int f'(x) \ln x dx = -\frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$$

**Câu 17.**  $\int \sin^5 x \cdot \cos x dx$  bằng

$$A. \frac{\sin^6 x}{6} + C$$

$$B. -\frac{\sin^6 x}{6} + C$$

$$C. -\frac{\cos^6 x}{6} + C$$

$$D. \frac{\cos^6 x}{6} + C$$

**Câu 18.** Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{\sin 2x}{1 + \cos x}$  thỏa mãn  $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ . Tính  $F(0)$ .

$$A. F(0) = 2 \ln 2 - 2.$$

$$B. F(0) = 2 \ln 2$$

$$C. F(0) = \ln 2.$$

$$D. F(0) = 2 \ln 2 + 2.$$

**Câu 19.** Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{1 + \tan x}$  thỏa mãn  $F(0) = \frac{\pi}{4}$ . Tính  $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ .

$$A. F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

$$B. F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$C. F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

$$D. F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}.$$

**Câu 20.**  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $y = \frac{\ln x}{x}$  và  $F(e^2) = 4$ . Tính  $F(e)$ ?

$$A. F e = \frac{1}{2}.$$

$$B. F e = \frac{5}{2}$$

$$C. F e = -\frac{3}{2}$$

$$D. \frac{1}{2} + e$$

**Câu 21.** Biết  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x) = x \sin 2x$  và thỏa  $F(0) + F(\pi) = -\frac{\pi}{2}$ . Tính  $F\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$$A. \frac{\pi}{4}$$

$$B. -\frac{\pi}{4}$$

$$C. \frac{1}{4}$$

$$D. -\frac{1}{4}$$

**Câu 22.** Cho  $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = (x-3)^2 e^x$ . Tính  $S = a + b + c$ .

$$A. S = 12.$$

$$B. S = 0.$$

$$C. S = 10.$$

$$D. S = 14.$$

**Câu 23.** Cho  $F(x) = \frac{a}{x}(\ln x + b)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x^2}$  Tính  $S = a + b$ .

**Câu 24.** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 4x(1 + \ln x)$  là

$$A. 2x^2 \ln x + 3x^2.$$

$$B. 2x^2 \ln x + x^2.$$

$$C. 2x^2 \ln x + 3x^2 + C.$$

$$D. 2x^2 \ln x + x^2 + C.$$

**Câu 25.** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $f(2) = -\frac{2}{9}$  và  $f'(x) = 2x[f(x)]^2$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Giá trị của  $f(1)$  bằng:

$$A. -\frac{35}{36}$$

$$B. -\frac{2}{3}$$

$$C. -\frac{19}{36}$$

$$D. -\frac{2}{15}$$

**Câu 27.** Cho biết  $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x - \frac{1}{x}$  là một nguyên hàm của  $f(x) = \frac{(x^2 + a)^2}{x^2}$ . Tìm nguyên hàm của  $g(x) = x \cos ax$ .

$$A. x \sin x - \cos x + C.$$

$$B. \frac{1}{2}x \sin 2x - \frac{1}{4} \cos 2x + C.$$

$$C. x \sin x + \cos x + C.$$

$$D. \frac{1}{2}x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C.$$

**Câu 28.** Giả sử hàm số  $f(x)$  liên tục, dương trên  $\mathbb{R}$ ; thỏa mãn  $f(0) = 1$  và  $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x}{x^2 + 1}$ . Khi đó hiệu

$T = f(2\sqrt{2}) - 2f(1)$  thuộc khoảng

A. (2;3)

B. (7;9)

C. (0;1)

D. (9;12)

**Câu 29.** Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$  thỏa mãn  $f'(x) = \frac{2}{2x-1}$  và  $f(0) = 1$ . Giá trị của biểu thức  $f(-1) + f(3)$  bằng

A.  $4 + \ln 15$ .

B.  $3 + \ln 15$ .

C.  $2 + \ln 15$ .

D.  $\ln 15$ .

**Câu 30.** Tìm nguyên hàm  $I = \int 2x\sqrt{x^2-1}dx$  bằng cách đặt  $u = x^2 - 1$ , mệnh đề nào dưới đây đúng?

A.  $I = 2 \int \sqrt{u} du$

B.  $I = \int \sqrt{u} du$

C.  $I = \int \sqrt{u} du$

D.  $I = \frac{1}{2} \int \sqrt{u} du$

# TÍCH PHÂN

## A. Lí thuyết

### 1. Định nghĩa

Cho  $f(x)$  là hàm số liên tục trên  $K$  và  $a, b$  là hai số bất kì thuộc  $K$ . Giả sử  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x)$  trên  $K$  thì hiệu số  $F(b) - F(a)$  được gọi là tích phân của  $f(x)$  từ  $a$  đến  $b$  và kí hiệu là

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

### 2. Tính chất

▪ Tích phân tại một giá trị xác định của biến số thì bằng 0, tức là  $\int_a^a f(x) dx = 0$ .

▪ Đổi cận thì đổi dấu, tức là  $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$ .

▪ Hằng số trong tích phân có thể đưa ra ngoài dấu tích phân, tức là

$$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad (k \text{ là hằng số}).$$

▪ Tích phân một tổng bằng tổng các tích phân, tức là

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

▪ Tách đôi tích phân, tức là  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ .

• Nếu hàm số  $f(x)$  liên tục và là hàm số lẻ trên  $[-a; a]$  thì  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$

• Nếu hàm số  $f(x)$  liên tục và là hàm số chẵn trên  $[-a; a]$  thì  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$

• Nếu  $f(x)$  liên tục và là hàm chẵn trên  $\mathbb{R}$  thì:  $\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{f(x)}{a^x + 1} dx = \int_0^{\alpha} f(x) dx$  (với  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  và  $a > 0$ )

• Nếu  $f(x)$  liên tục trên  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  thì  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$

• Nếu  $f(x)$  liên tục và  $f(a+b-x) = f(x)$  hoặc  $f(a+b-x) = -f(x)$

**Chú ý:** Tích phân  $\int_a^b f(x) dx$  chỉ phụ thuộc vào hàm  $f$  và các cận  $a, b$  mà không phụ thuộc vào biến

số  $x$ , tức là  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$ .

## B. Ví dụ

Ví dụ 1. Tính các tích phân sau

$$a) \int_{-1}^3 (x^3 + 1) dx$$

$$b) \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left( \frac{4}{\cos^2 x} - 3 \sin x \right) dx$$

$$c) \int_{-2}^2 |x-1| dx$$

$$d) \int_1^2 \frac{2x}{2x-1} dx$$

$$e) \int_{-1}^0 \frac{x^3 + 3x + 1}{x-1} dx$$

$$f) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x \cdot \cos x \cdot dx$$

### Hướng dẫn

$$a) \int_{-1}^3 (x^3 + 1) dx = \int_{-1}^3 x^3 dx + \int_{-1}^3 1 dx = \left( \frac{x^4}{4} + x \right) \Big|_{-1}^3 = \left( \frac{81}{4} + 3 \right) - \left( \frac{1}{4} - 1 \right) = 24$$

$$b) \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left( \frac{4}{\cos^2 x} - 3 \sin x \right) dx = 4 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx - 3 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx = (4 \tan x + 3 \cos x) \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \\ = \left( 4 \tan \frac{\pi}{4} + 3 \cos \frac{\pi}{4} \right) - \left[ 4 \tan \left( -\frac{\pi}{4} \right) + 3 \cos \left( -\frac{\pi}{4} \right) \right] = 8$$

$$c) \int_{-2}^2 |x-1| dx = \int_{-2}^1 |x-1| dx + \int_1^2 |x-1| dx = \int_{-2}^1 (1-x) dx + \int_1^2 (x-1) dx = \left( x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-2}^1 + \left( \frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_1^2 = 5$$

$$d) \int_1^2 \frac{2x}{2x-1} dx = \int_1^2 \left( 1 + \frac{1}{2x-1} \right) dx = \left[ x + \frac{1}{2} \ln |2x-1| \right]_1^2 = 1 + \frac{1}{2} \ln 3 = \frac{1}{2} \ln 3.$$

$$e) \int_{-1}^0 \frac{x^3 + 3x + 1}{x-1} dx = \int_{-1}^0 \left( x^2 + x + 4 + \frac{5}{x-1} \right) dx = \left[ \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln |x-1| \right]_{-1}^0 = \frac{23}{6} - \ln 2$$

$$f) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x \cdot \cos x \cdot dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} (\sin 4x + \sin 2x) dx = -\frac{1}{2} \left( \frac{\cos 4x}{4} + \frac{\cos 2x}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$$

Ví dụ 2. Một số tích phân hàm ẩn

a) Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục với mọi  $x \neq 1$  thỏa mãn  $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = x + 3, x \neq 1$ . Tính  $I = \int_2^{e+1} f(x) dx$ .

b) Cho hàm số  $y = f(x)$  LT với mọi  $x \neq 0$  thỏa mãn  $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x, x \neq 0$ . Tính  $I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x} dx$ .

### Hướng dẫn

a) Đặt  $t = \frac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow xt - t = x + 1 \Rightarrow x = \frac{t+1}{t-1}$ , suy ra  $f(t) = \frac{t+1}{t-1} + 3 = 4 + \frac{2}{t-1}$  hay

$$f(x) = 4 + \frac{2}{x-1}$$

$$\text{Do đó: } I = \int_2^{e+1} \left( 4 + \frac{2}{x-1} \right) dx = 4x + 2 \ln |x-1| \Big|_2^{e+1} = 4e - 2.$$



b) Tương tự ta tìm được  $f(x) = -x + \frac{2}{x}$ . Suy ra 
$$I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x} dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left( -1 + \frac{2}{x^2} \right) dx = \left( -x - \frac{2}{x} \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^2 = \frac{3}{2}$$

### C. Bài tập tự luận

#### Bài 1. Tính các tích phân sau

$$\text{a) } \int_1^{\sqrt{2}} (x^3 + 2x + 1) dx \quad \text{b) } \int_1^2 (x^2 + \frac{3}{x} + e^x) dx \quad \text{c) } \int_1^2 \frac{x-1}{x^2} dx \quad \text{e) } \int_2^3 (2^x + 3^x)^2 dx \quad \text{f) } \int_1^e (x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + x^2) dx$$

#### Bài 2: Tính các tích phân sau

$$\begin{aligned} \text{a) } & \int_1^{\sqrt{2}} (x^5 + 3e^{3x+1}) dx & \text{b) c) } & \int_1^2 \frac{x-1}{x^2} dx & \text{f)g) } & \int_1^2 (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1) dx & \text{h) } & \int_1^2 (x^2 + x\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) dx \\ \text{i) } & \int_1^4 (\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[4]{x}) dx & \text{k) } & \int_1^2 \frac{3x+4}{x+1} dx & \text{l) } & \int_1^{e^2} \frac{2\sqrt{x}+5-7x}{x} dx & \text{m) } & \int_1^8 \left( 4x - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \right) dx \\ \text{n) } & \int_1^{\sqrt{3}} \left( \frac{2x+1}{x+2} \right)^2 dx & \text{o) } & \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 5x + 6} & \text{p) } & \int_0^3 \frac{x^3 dx}{x^2 + 2x + 1} \end{aligned}$$

#### Bài 3: Tính các tích phân sau

$$\begin{aligned} \text{a) } & \int_1^2 \sqrt{x+1} dx & \text{b) } & \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}} & \text{c) } & \int_{-2}^{-1} \frac{(x^4 + 4)^2}{x^2} dx \\ \text{d) } & \int_0^{\frac{7}{2}} \frac{1}{\sqrt{2x+1}} dx & \text{e) } & \int_{-8}^{-3} \frac{1}{x\sqrt{1-x}} dx \end{aligned}$$

#### Bài 4: Tính các tích phân sau

$$\begin{aligned} \text{a) } & \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin(x + \frac{\pi}{6}) dx & \text{b) } & \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin x + 3 \cos x + x) dx & \text{c) } & \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x dx & \text{d) } & \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx \\ \text{f) } & \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (2 \cot^2 x + 5) dx & \text{g) } & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x \cdot \cos x dx & \text{i) } & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx \\ \text{k) } & \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x dx \end{aligned}$$

#### Bài 5. Tính tích phân hàm trị tuyệt đối

$$\begin{aligned} \text{a) } & \int_1^3 |x-2| dx & \text{b) } & \int_0^2 |x^2 + 2x - 3| dx & \text{c) } & \int_{-1}^1 (|2x-1| - |x|)^2 dx & \text{d) } & \int_0^{3\pi/2} |\cos x| dx & \text{e) } & \int_0^{3\pi/2} \sqrt{1 - \cos 2x} dx \\ \text{f) } & \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin 2x} dx & \text{g) } & \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin x} dx \end{aligned}$$

## D. Bài tập trắc nghiệm

**Câu 1:** Tính tích phân  $I = \int_0^1 (x^4 - x + 1)dx$

A.  $I = \frac{7}{10}$

B.  $I = \frac{7}{3}$

C.  $I = \frac{10}{7}$

D.  $I = -\frac{7}{10}$

**Câu 2 :** Tính tích phân  $\int_1^4 \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx$

A.  $I = 2 + 2\ln 2$

B.  $I = 2 + \ln 2$

C.  $I = 4\ln 2$

D.  $I = 2 - 2\ln 2$

**Câu 3:** Tính tích phân  $I = \int_1^2 \frac{x+1}{x^3} dx$

A.  $I = \frac{10}{7}$

B.  $I = \frac{7}{8}$

C.  $I = \frac{7}{10}$

D.  $I = \frac{7}{3}$

**Câu 4:** Tính tích phân  $I = \int_0^1 \frac{1}{2x+1} dx$

A.  $I = \ln 2$

B.  $I = \frac{1}{3}\ln 2$

C.  $I = 2\ln 3$

D.  $I = \frac{1}{2}\ln 3$

**Câu 5.** Tích phân  $\int_1^2 e^{3x-1} dx$  bằng:

A.  $\frac{1}{3}(e^5 - e^2)$ .

B.  $\frac{1}{3}e^5 - e^2$ .

C.  $e^5 - e^2$ .

D.  $\frac{1}{3}(e^5 + e^2)$ .

**Câu 6.** Cho  $\int_{-1}^2 f(x)dx = 2$  và  $\int_{-1}^2 g(x)dx = -1$ . Tính  $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) - 3g(x)]dx$

A.  $I = \frac{5}{2}$

B.  $I = \frac{7}{2}$

C.  $I = \frac{17}{2}$

D.  $I = \frac{11}{2}$

**Câu 7.** Cho  $\int_0^1 \left( \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = a \ln 2 + b \ln 3$  với  $a, b$  là các số nguyên. Mđ nào dưới đây đúng ?

A.  $a + b = 2$ .

B.  $a - 2b = 0$ .

C.  $a + b = -2$ .

D.  $a + 2b = 0$ .

**Câu 8.** Cho  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = 5$ . Tính  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2\sin x] dx$ .

A.  $I = 7$

B.  $I = 5 + \frac{\pi}{2}$

C.  $I = 3$

D.  $I = 5 + \pi$

**Câu 9.** Nếu  $f(1) = 12$ ,  $f'(x)$  liên tục và  $\int_1^4 f'(x)dx = 17$ . Giá trị của  $f(4)$  bằng:

A. 29.

B. 5.

C. 19.

D. 9.

**Câu 10.** Cho  $f(x)$  là hàm số chẵn và  $\int_{-3}^0 f(x)dx = a$ . Chọn mệnh đề đúng:

A.  $\int_0^3 f(x)dx = -a$ .

B.  $\int_{-3}^3 f(x)dx = 2a$ .

C.  $\int_{-3}^3 f(x)dx = a$ .

D.  $\int_3^0 f(x)dx = a$ .

**Câu 11.** Cho  $\int_2^5 f(x) dx = 10$ . Khi đó  $\int_5^2 [2 - 4f(x)] dx$  bằng:

- A. 32.                          B. 34.                          C. 36.                          D. 40.

**Câu 12.** Cho  $\int_1^2 f(x) dx = 1$  và  $\int_1^4 f(t) dt = -3$ . Giá trị của  $\int_2^4 f(u) du$  là:

- A. -2.                          B. -4.                          C. 4.                          D. 2.

**Câu 13.** Cho hàm  $f$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $\int_a^d f(x) dx = 10$ ,  $\int_b^d f(x) dx = 8$ ,  $\int_a^c f(x) dx = 7$ .

Tính  $I = \int_b^c f(x) dx$ , ta được.

- A.  $I = -5$ .                          B.  $I = 7$ .                          C.  $I = 5$ .                          D.  $I = -7$ .

**Câu 14.** Cho biết  $\int_1^3 f(x) dx = -2$ ,  $\int_1^4 f(x) dx = 3$ ,  $\int_1^4 g(x) dx = 7$ .

Khẳng định nào sau đây là sai?

- A.  $\int_1^4 [f(x) + g(x)] dx = 10$ .                          B.  $\int_3^4 f(x) dx = 1$ .  
C.  $\int_4^3 f(x) dx = -5$ .                          D.  $\int_1^4 [4f(x) - 2g(x)] dx = -2$ .

**Câu 15.** Cho biết  $A = \int_1^2 [3f(x) + 2g(x)] dx = 1$  và  $B = \int_1^2 [2f(x) - g(x)] dx = -3$ . Khi đó  $\int_1^2 f(x) dx$  bằng:

- A. 1.                          B. 2.                          C.  $-\frac{5}{7}$ .                          D.  $\frac{1}{2}$ .

**Câu 16.** Tính các hằng số  $A$  và  $B$  để hàm số  $f(x) = A \sin(\pi x) + B$  thỏa mãn đồng thời các điều kiện

$f'(1) = 2$  và  $\int_0^2 f(x) dx = 4$ .

- A.  $A = -\frac{2}{\pi}$ ,  $B = 2$ .                          B.  $A = \frac{2}{\pi}$ ,  $B = 2$ .  
C.  $A = -\frac{2}{\pi}$ ,  $B = -2$ .                          D.  $A = \frac{2}{\pi}$ ,  $B = -2$ .

**Câu 17.** Giá trị nào của  $b$  để  $\int_1^b (2x - 6) dx = 0$ ?

- A.  $b = 0$  hoặc  $b = 3$ .                          B.  $b = 0$  hoặc  $b = 1$   
C.  $b = 5$  hoặc  $b = 0$ .                          D.  $b = 1$  hoặc  $b = 5$ .

**Câu 18.** Cho  $\int_1^a \frac{x+1}{x} dx = e$  với  $a > 1$ . Khi đó, giá trị của  $a$  thỏa mãn là:

- A.  $\frac{1}{e}$ .                          B.  $e$ .                          C.  $\frac{e}{2}$ .                          D.  $e^2$ .

**Câu 19.** Nếu  $\int_1^5 \frac{dx}{2x-1} = \ln c$  với  $c \in \mathbb{Q}$  thì giá trị của  $c$  bằng:

- A. 9.                          B. 6.                          C. 3.                          D. 81.

**Câu 13.** Nếu kết quả của  $\int_1^2 \frac{dx}{x+3}$  được viết ở dạng  $\ln \frac{a}{b}$  với  $a, b$  là các số tự nhiên và ước chung lớn nhất

của  $a, b$  bằng 1. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau:

- A.  $3a - b < 12$ .    B.  $a + 2b = 13$ .    C.  $a - b > 2$ .    D.  $a^2 + b^2 = 41$ .

**Câu 20.** Tính tích phân  $\int_1^2 \left( \frac{1}{x-3} - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx$ , ta thu được kết quả ở dạng  $a + b \ln 2$  với  $a, b \in \mathbb{Q}$ . Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

- A.  $a^2 + b^2 > 10$ .    B.  $a > 0$ .    C.  $a - b > 1$ .    D.  $b - 2a > 0$ .

**Câu 21.** Kết quả của tích phân  $\int_{-1}^0 \left( x + 1 + \frac{2}{x-1} \right) dx$  được viết dưới dạng  $a + b \ln 2$  với  $a, b \in \mathbb{Q}$ . Khi đó  $a + b$  bằng:

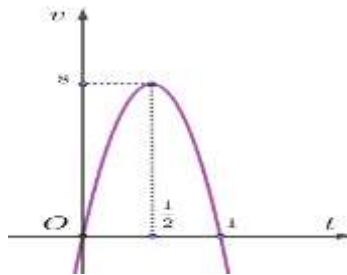
- A.  $\frac{3}{2}$ .    B.  $-\frac{3}{2}$ .    C.  $\frac{5}{2}$ .    D.  $-\frac{5}{2}$ .

**Câu 22.** Biết rằng  $\int_0^1 \frac{2x+3}{2-x} dx = a \ln 2 + b$  với  $a, b \in \mathbb{Q}$ .

Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau:

- A.  $a < 5$ .    B.  $b > 4$ .    C.  $a^2 + b^2 > 50$ .    D.  $a + b < 1$ .

**Câu 23.** Một người chạy trong thời gian 1 giờ, vận tốc  $v$  (km/h) phụ thuộc vào thời gian  $t$  (h) có đồ thị là một phần parabol với đỉnh  $I\left(\frac{1}{2}; 8\right)$  và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường  $s$  người đó chạy được trong khoảng thời gian 45 phút, kể từ khi chạy?



- A.  $s = 4$  (km)    B.  $s = 2,3$  (km)    C.  $s = 4,5$  (km)    D.  $s = 5,3$  (km)

**Câu 24.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[1; \ln 3]$  và thỏa mãn  $f(1) = e^2$ ,  $\int_1^{\ln 3} f'(x) dx = 9 - e^2$ . Tính giá trị của  $f(\ln 3)$ .

- A.  $f(\ln 3) = 9 - 2e^2$ .    B.  $f(\ln 3) = 9$ .  
C.  $f(\ln 3) = -9$ .    D.  $f(\ln 3) = 2e^2 - 9$ .

**Câu 25.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[1; 3]$  và thỏa mãn  $f(1) = 1$ ,  $f(3) = m$ . Tìm tham số thực  $m$  để  $\int_1^3 f'(x) dx = 5$ .

- A.  $m = 6$ .    B.  $m = 5$ .    C.  $m = 4$ .    D.  $m = -4$ .

## PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

### a. Lý thuyết

#### 1. Phương pháp đổi biến số

##### a) Phương pháp đổi biến số loại 1

Giả sử cần tính  $I = \int_a^b f(x) dx$  ta thực hiện các bước sau

**Bước 1.** Đặt  $x = u(t)$  (với  $u(t)$  là hàm có đạo hàm liên tục trên  $[\alpha; \beta]$ ,  $f[u(t)]$  xác định trên  $[\alpha; \beta]$  và  $u(\alpha) = a$ ,  $u(\beta) = b$ ) và xác định  $\alpha, \beta$ .

**Bước 2.** Thay vào, ta có:  $I = \int_{\alpha}^{\beta} f[u(t)] \cdot u'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} g(t) dt = G(t) \Big|_{\alpha}^{\beta} = G(\beta) - G(\alpha)$ .

**Một số dạng thường dùng dùng phương pháp đổi biến số loại 1**

Dấu hiệu	Cách chọn
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$\begin{cases} x =  a  \sin t & t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \\ x =  a  \cos t & t \in [0; \pi] \end{cases}$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$\begin{cases} x = \frac{ a }{\sin t} & t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\} \\ x = \frac{ a }{\cos t} & t \in [0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \end{cases}$
$x^2 + a^2$	$x =  a  \tan t \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

**b) Phương pháp đổi biến số loại 2**

Tương tự như nguyên hàm, ta có thể tính tích phân bằng phương pháp đổi biến số (ta gọi là loại 2) như sau:

Để tính tích phân  $I = \int_a^b f(x) dx$  nếu  $f(x) = g[u(x)] \cdot u'(x)$ , ta có thể thực hiện phép đổi biến như sau

**Bước 1.** Đặt  $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x) dx$ . Đổi cận  $\begin{cases} x = a \Rightarrow t = u(a) \\ x = b \Rightarrow t = u(b) \end{cases}$ .

**Bước 2.** Thay vào ta có  $I = \int_{u(a)}^{u(b)} g(t) dt = G(t) \Big|_{u(a)}^{u(b)}$ .

**2. Phương pháp tích phân từng phần**

Cho hai hàm số  $u$  và  $v$  liên tục trên  $[a; b]$  và có đạo hàm liên tục trên  $[a; b]$ .

Khi đó:  $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$ .

Một số tích phân các hàm số dễ phát hiện  $u$  và  $dv$

<b>Dạng 1</b>	$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \ln[g(x)] dx$	Đặt $\begin{cases} u = \ln[g(x)] \\ dv = f(x) dx \end{cases}$
<b>Dạng 2</b>	$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \begin{bmatrix} \sin ax \\ \cos ax \\ e^{ax} \end{bmatrix} dx$	Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = \begin{bmatrix} \sin ax \\ \cos ax \\ e^{ax} \end{bmatrix} dx \end{cases}$

<b>Dạng 3</b>	$\int_{\alpha}^{\beta} e^{ax} \begin{bmatrix} \sin ax \\ \cos ax \end{bmatrix} dx$	Đặt $\begin{cases} u = \begin{bmatrix} \sin ax \\ \cos ax \end{bmatrix} \\ dv = e^{ax} dx \end{cases}$
---------------	--	--

Ưu tiên đặt  $u$  theo quy tắc "**nhất log, nhì đa, tam lượng, tứ mũ**".

Tức là trong hàm số dưới dấu tích phân hợp bởi 2 trong 4 hàm số trên thì ta đặt  $u$  theo thứ tự ưu tiên như trên, còn lại thì đặt là  $dv$ .

**B. Ví dụ áp dụng**

**Ví dụ 1:** Tính các tích phân sau( *đổi biến số* )

- a)  $\int_0^1 (2x+1)^2 dx$       b)  $\int_0^1 x(1-x)^{19} dx$       c)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx$   
d)  $\int_0^1 \sqrt{x^2+3} \cdot x dx$       e)  $\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx$       f)  $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$

**Giải**

a) Đặt  $t = 2x+1$  ta có  $dt = 2dx$ , đổi cận:  $x=0 \Rightarrow t=1, x=1 \Rightarrow t=3$

Ta được  $\int_0^1 (2x+1)^2 dx = \int_1^3 \frac{1}{2} t^2 dt = \frac{13}{6}$

b) Đặt  $t = 1 - x$ , ta được  $\int_0^1 x(1-x)^{19} dx = \int_0^1 (1-t)t^{19} dt = \frac{1}{420}$

c) Ta có  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \cdot \cos x dx$

Đặt  $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$ . Ta được  $\int_0^1 (1-t^2) \cdot dt = (t - \frac{t^3}{3}) \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$

d) Đặt  $t = \sqrt{x^2+3} \Rightarrow t^2 = x^2+3 \Rightarrow 2t dt = 2x dx$ , suy ra  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx = \int_{\sqrt{3}}^2 t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_{\sqrt{3}}^2 = \frac{1}{3}(8-3\sqrt{3})$

e) Đặt  $t = x^2 + x + 1 \Rightarrow dt = (2x+1) dx$ , ta được  $\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx = \int_1^3 \frac{dt}{t} = \ln|t| \Big|_1^3 = \ln 3$

f) Đặt  $x = \tan t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \Rightarrow x'(t) = \frac{1}{\cos^2 t}$ . Ta được  $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 t} \cdot \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{\pi}{4}$

**Ví dụ 2:** Tính các tích phân sau( *từng phần* )

- a)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos x dx$       b)  $\int_1^e x \cdot \ln x dx$       c)  $\int_0^{\ln 2} x e^x dx$

**Giải**

a) Đặt  $\begin{cases} u = x \\ v' = \cos x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = 1 \\ v = \sin x \end{cases} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos x dx = x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -1$

$$\text{b) Đặt: } \begin{cases} u = \ln x \\ v' = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = \frac{1}{x} \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \int_1^e x \cdot \ln x \cdot dx = \ln x \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^e = \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4} x^2 \Big|_1^e = \frac{e^2 + 1}{4}$$

$$\text{c) Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases}, \text{ ta được } \int_0^{\ln 2} x e^x dx = x e^x \Big|_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} e^x dx = 2 \ln 2 - 1$$

**Ví dụ 3.** Tích phân hàm ẩn

$$\text{a) Cho } \int_0^4 f(x) dx = 16, \text{ tính } \int_0^2 f(2x) dx$$

$$\text{b) Cho hàm số } f(x) \text{ liên tục trên } \mathbb{R} \text{ thỏa mãn } f(-x) + 2019f(x) = e^x. \text{ Tính } \int_{-1}^1 f(x) dx$$

$$\text{c) Cho hàm số } f(x) \text{ có đạo hàm liên tục trên } \mathbb{R}. \text{ Biết } f(5) = 1 \text{ và } \int_0^1 x f(5x) dx = 1, \text{ Tính } \int_0^5 x^2 f'(x) dx$$

$$\text{d) Cho hàm số } f(x) \text{ liên tục trên } \mathbb{R} \text{ và } f(x) + f(-x) = \cos^4 x \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}. \text{ Tính: } I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx.$$

$$\text{e) Cho hàm số } f(x) \text{ liên tục trên } \mathbb{R} \text{ và } f(x) + f(-x) = \sqrt{2 + 2 \cos 2x}, \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}. \text{ Tính: } I = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx$$

**Giải.**

$$\text{a) Đặt } t = 2x \text{ ta được } \int_0^2 f(2x) dx = \frac{1}{2} \int_0^4 f(t) dt = 8, I = \int_0^2 f(2x) dx = \frac{1}{2} \int_0^4 f(t) dt = 8.$$

$$\text{b) Ta có } f(-x) + 2019f(x) = e^x \text{ suy ra: } f(x) + 2019f(-x) = e^{-x}. \text{ Do đó } f(x) = \frac{2019e^x - e^{-x}}{2019^2 - 1}$$

$$\text{c) Đặt } t = 5x \Rightarrow \begin{cases} dx = \frac{dt}{5} \\ x = \frac{t}{5} \end{cases}. \text{ Đổi cận: } x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 1 \Rightarrow t = 5.$$

$$\text{Khi đó: } \int_0^1 x f(5x) dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^5 \frac{t}{5} f(t) \frac{dt}{5} = 1 \Leftrightarrow \int_0^5 t \cdot f(t) dt = 25 \Leftrightarrow \int_0^5 x \cdot f(x) dx = 25 \quad (*)$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}.$$



Ta có: (\*)  $\Leftrightarrow \frac{x^2}{2} \cdot f(x) \Big|_0^5 - \frac{1}{2} \int_0^5 x^2 \cdot f'(x) dx = 25$

$\Leftrightarrow \frac{25}{2} - \frac{1}{2} \int_0^5 x^2 \cdot f'(x) dx = 25 \Leftrightarrow \int_0^5 x^2 \cdot f'(x) dx = -25.$

d) Đặt  $x = -t \Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f(-t)(-dt) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-t) dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x) dx$

$\Rightarrow 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + f(-x)] dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx \Rightarrow I = \frac{3\pi}{16}$

e) Ta có:  $I = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^0 f(x) dx + \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx \quad (1)$

+ Tính:  $I_1 = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^0 f(x) dx$ . Đặt  $x = -t \Rightarrow dx = -dt \Rightarrow I_1 = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(-t) dt = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(-x) dx$

Thay vào (1) ta được:  $I = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} [f(-x) + f(x)] dx = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{2(1 + \cos 2x)} dx = 2 \int_0^{\frac{3\pi}{2}} |\cos x| dx$

$= 2 \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x dx \right] = 2 \left[ \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \right] = 6$

### C. Bài tập tự luận

#### Bài 1. Đổi biến dạng 1

a)  $\int_0^1 x(1-x)^{19} dx$     b)  $\int_0^1 (1+x)^{2020} dx$     c)  $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$     d)  $\int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^2)^3} dx$     e)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx$

f)  $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{2x+1}}$     g)  $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx$     h)  $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx$     i)  $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1+e^x} dx$     k)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx$

l)  $\int_0^1 \frac{x^5}{x^2+1} dx$     m)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cos x dx$     n)  $\int_1^e \frac{\sqrt{1+3 \ln x} \ln x}{x} dx$

o)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \cdot \sin^3 x}{1 + \sin^2 x} dx$     p)  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin 2x}{2 \sin^2 x + \cos^2 x} dx$

$$q) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sqrt{7 + \cos 2x}} \quad r) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sqrt{\cos x - \cos^2 x} dx \quad s) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sqrt{2 + \cos^2 x}}$$

$$t) \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{\ln^2 x}{x \sqrt{\ln x + 1}} dx \quad u) \int_{-1}^0 x(e^{2x} + \sqrt[3]{x+1}) dx \quad v) \int_0^{\ln 2} \frac{e^x dx}{\sqrt{(e^x + 1)^3}}$$

$$x) \int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{(e^x + 1)\sqrt{e^x - 1}} dx \quad y) \int_0^1 \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x + e^{-x}}} dx \quad z) \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$$

## Bài 2. Đổi biến dạng 2

$$a) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad b) \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}} \quad c) \int_1^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx$$

$$d) \int_0^3 \frac{dx}{x^2+3} \quad e) \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)} \quad f) \int_0^1 \frac{xdx}{x^4+x^2+1}$$

$$g) \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} \quad h) \int_1^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^3} dx \quad i) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^5}}$$

$$k) \int_2^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \quad l) \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad m) \int_0^2 x\sqrt{2x-x^2} dx$$

## Bài 3. Tích phân từng phần

$$a) \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin 2x dx \quad b) \int_0^{\ln 2} x e^x dx \quad c) \int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx \quad d) \int_1^e x \ln x dx \quad e) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} x \tan^2 x dx$$

$$f) \int_0^1 (x-2)e^{2x} dx \quad g) \int_1^2 (x-2) \ln x dx \quad h) \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x+1) \sin 2x dx \quad i) \int_0^{\frac{\pi}{4}} x(1 + \sin 2x) dx$$

$$k) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{3x} \sin 5x dx \quad l) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x} \sin 2x dx \quad m) \int_1^e \ln^3 x dx \quad o) \int_1^e x^3 \ln^2 x dx \quad p) \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{\ln x}{x^2} dx$$

## Bài 4. Tích phân tổng hợp

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x^2 + e^x + 2x^2 e^x}{1 + 2e^x} dx \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \sin x + (x+1) \cos x}{x \sin x + \cos x} dx \quad I_3 = \int_{-1}^0 x(e^{2x} + \sqrt[3]{x+1}) dx$$

$$I_4 = \int_1^e \frac{x^2 + x \ln x + 1}{x} e^x dx \quad I_5 = \int_1^2 e^{-x} \left( x + \frac{e^x \ln e x}{x} \right) dx \quad I_6 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \left( \frac{1}{2 + \sqrt{3 \sin x + 1}} + x \right) dx$$

$$\begin{aligned}
I_7 &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{3 \cot x + 1} + x}{\sin^2 x} dx & I_8 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2x + \tan^{2015} x}{\cos^2 x} dx & I_9 &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\sin^2 x} \left( x - \frac{\sin^3 x}{\sqrt{2 \cos x + 3}} \right) dx \\
I_{10} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos 2x + 1}{\cos x + \sin x} dx & I_{11} &= \int_0^1 \frac{x^3 - 2x}{x^4 + 1} dx & I_{12} &= \int_0^1 \frac{x^2 + e^x \sqrt{x} + x}{(x+1)e^x} dx & I_{13} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 x - 1) \cos^2 x dx \\
I_{14} &= \int_1^e \frac{(1+x^2) \ln x + x^2}{x^3} dx & I_{15} &= \int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{1 - \ln(1 + \sqrt{e^x + 1})}{\sqrt{e^x + 1}} e^x dx & I_{16} &= \int_1^e \frac{(x^3 + 1) \ln x + 2x^2 + 1}{2 + x \ln x} dx \\
I_{17} &= \int_1^e \frac{2 + \frac{1}{x}(\ln x + 1)}{x + \ln x} dx & I_{18} &= \int_1^e \frac{x \ln x - 1}{x(e^x + \ln x)^2} dx & I_{19} &= \int_0^1 \frac{1 + (2+x)xe^{2x}}{1 + xe^x} dx \\
I_{20} &= \int_1^2 \frac{e^x(x \ln x + 1) + xe^x + \ln x}{1 + xe^x} dx & I_{21} &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x \sin x \ln(ex) + e^x \cos x + \ln x}{1 + e^x \sin x} dx \\
I_{22} &= \int_1^e \frac{1 - x(e^x - 1)}{x(1 + xe^x \ln x)} dx & I_{23} &= \int_1^e \frac{x^3 \ln^2 x + (1 + 10x^2) \ln x + 1}{x \ln x + 10} dx & I_{24} &= \int_1^e \frac{xe^x + 1}{x(e^x + \ln x)} dx
\end{aligned}$$

### Bài 5. Tích phân hàm ẩn

1. Cho hàm số  $f(x) = x^4 + 4x^3 - 3x^2 - x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ . Tính  $I = \int_0^1 f^2(x) \cdot f'(x) dx$ .

2. Cho hàm số  $f(x)$  liên tục nhận giá trị dương trên khoảng  $(0; +\infty)$  thỏa mãn  $f(1) = 1$

$f(x) = f'(x) \cdot \sqrt{3x+1}$ . với mọi  $x > 0$ . Tính  $f(5)$

3. Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và liên tục trên  $\mathbb{R}$  có  $f(x)_{\min} = f(0) = 1$ . Biết  $f'(x) = 4xf(x) \sqrt{\ln[ef(x)]}, \forall x \in \mathbb{R}$ . Xét phương trình  $\ln f(x) = m^2$  có tổng các nghiệm bằng  $S$ . Tính  $S$ .

4. Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$  thỏa mãn  $f'(x) = \frac{3x-1}{x+2}$ ,  $f(0) = 1$  và  $f(-4) = 2$ . Giá trị của biểu thức  $f(2) + f(-3)$  bằng:

5. Cho  $f(x)$  là hàm số chẵn trên đoạn  $-1; 1$  và thỏa mãn  $\int_{-1}^1 f(x) dx = 4$ . Tính tích phân  $I = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{2^x + 1} dx$ .

6. Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $a > 0$ . Giả sử rằng với mọi  $x \in (0; a)$ , ta có  $f(x) > 0$  và  $f(x)f(a-x) = 1$ . Tính  $I = \int_0^a \frac{dx}{1+f(x)}$ .

7. Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và thỏa mãn  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \cdot f(\cos^2 x) dx = 1, \int_e^{e^2} \frac{f(\ln^2 x)}{x \ln x} dx = 1$ .

Tính  $I = \int_{\frac{1}{4}}^2 \frac{f(2x)}{x} dx$ .

8. Cho  $\int_0^1 f(x) dx = 2017$ . Tính tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{f(\tan 2x)}{1 + \cos 4x} dx$ .

9. Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx = 4$ ,  $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2 + 1} dx = 2$ . Tính tích phân  $I = \int_0^1 f(x) dx$ .

## D. Bài tập trắc nghiệm

**Câu 1.** Nếu  $f(x)$  liên tục và  $\int_0^4 f(x) dx = 10$ , thì  $\int_0^2 f(2x) dx$  bằng:

- A. 5.                      B. 29.                      C. 19.                      D. 9.

**Câu 2.** Đổi biến  $u = \ln x$  thì tích phân  $I = \int_1^e \frac{1 - \ln x}{x^2} dx$  thành:

- A.  $I = \int_1^0 (1-u) du$ .                      B.  $I = \int_0^1 (1-u) e^{-u} du$ .  
C.  $I = \int_1^0 (1-u) e^u du$ .                      D.  $I = \int_1^0 (1-u) e^{2u} du$ .

**Câu 3.** Cho  $I = \int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x}}{x} dx$  và  $t = \sqrt{1+3\ln x}$ .

Chọn khẳng định sai trong các khẳng định sau:

- A.  $I = \frac{2}{3} \int_1^2 t dt$ .    B.  $I = \frac{2}{3} \int_1^2 t^2 dt$ .    C.  $I = \frac{2}{9} t^3 \Big|_1^2$ .    D.  $I = \frac{14}{9}$ .

**Câu 4.** Cho  $f(x)$  là hàm số lẻ và  $\int_{-2}^0 f(x) dx = 2$ . Giá trị của  $\int_0^2 f(x) dx$  là:

- A. 2.                      B. -2.                      C. 1.                      D. -1.

**Câu 5.** Cho  $f(x)$  là hàm số chẵn và  $\int_{-1}^0 f(x) dx = 3$ . Giá trị của  $\int_{-1}^1 f(x) dx$  là:

- A. 3.                      B. 2.                      C. 6.                      D. -3.

**Câu 6.** Tính tích phân  $I = \int_0^2 x^2 \sqrt{x^3+1} dx$ .

- A.  $\frac{16}{9}$ .                      B.  $-\frac{16}{9}$ .                      C.  $\frac{52}{9}$ .                      D.  $-\frac{52}{9}$ .

**Câu 7.** Cho  $I = \int_1^2 2x\sqrt{x^2-1} dx$  và  $u = x^2 - 1$ . Chọn khẳng định sai trong các khẳng định sau:

- A.  $I = \int_0^3 \sqrt{u} du$ .    B.  $I = \int_1^2 \sqrt{u} du$ .    C.  $I = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_0^3$ .    D.  $I = 2\sqrt{3}$ .

**Câu 8.** Biến đổi  $\int_0^3 \frac{x}{1+\sqrt{1+x}} dx$  thành  $\int_1^2 f(t) dt$ , với  $t = \sqrt{1+x}$ . Khi đó  $f(t)$  là hàm nào trong các hàm số sau?

- A.  $f(t) = 2t^2 - 2t$ .                      B.  $f(t) = t^2 + t$ .                      C.  $f(t) = t^2 - t$ .                      D.  $f(t) = 2t^2 + 2t$ .

**Câu 9.** Cho tích phân  $I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx$ . Nếu đổi biến số  $t = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$  thì:

- A.  $I = -\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{t^2 dt}{t^2-1}$ .    B.  $I = \int_2^3 \frac{t^2 dt}{t^2+1}$ .    C.  $I = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{t^2 dt}{t^2-1}$ .    D.  $I = \int_2^3 \frac{t dt}{t^2+1}$ .

**Câu 10.** Kết quả của tích phân  $I = \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3}}$  có dạng  $I = a \ln 2 + b \ln(\sqrt{2}-1) + c$  với  $a, b, c \in \mathbb{Q}$ . Khi

đó giá trị của  $a$  bằng:

A.  $a = \frac{1}{3}$ .      B.  $a = -\frac{1}{3}$ .      C.  $a = -\frac{2}{3}$ .      D.  $a = \frac{2}{3}$ .

**Câu 11.** Biết rằng  $I = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \ln a$  với  $a \in \mathbb{Q}$ . Khi đó giá trị của  $a$  bằng:

**Câu 12.** Đổi biến số  $x = 4 \sin t$  của tích phân  $I = \int_0^{\sqrt{8}} \sqrt{16-x^2} dx$ , ta được:

A.  $I = -16 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt$ .      B.  $I = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) dt$ .

C.  $I = 16 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t dt$ .      D.  $I = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 2t) dt$ .

**Câu 13.** Cho tích phân  $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ . Nếu đổi biến số  $x = 2 \sin t$  thì:

A.  $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt$ .      B.  $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} t dt$ .      C.  $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{t}$ .      D.  $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} dt$ .

**Câu 14.** Đổi biến số  $x = \sqrt{3} \tan t$  của tích phân  $I = \int_{\sqrt{3}}^3 \frac{1}{x^2+3} dx$ , ta được:

A.  $I = \sqrt{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} dt$ .      B.  $I = \frac{\sqrt{3}}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{t}$ .      C.  $I = \frac{\sqrt{3}}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} t dt$ .      D.  $I = \frac{\sqrt{3}}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} dt$ .

**Câu 15.** Cho tích phân  $I = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^3} dx$ . Nếu đổi biến số  $x = \frac{1}{\sin t}$  thì:

A.  $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt$ .      B.  $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t dt$ .      C.  $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt$ .      D.  $I = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) dt$ .

**Câu 16.** Cho hàm số  $f(x)$  có nguyên hàm trên  $\mathbb{R}$ . Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A.  $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 f(1-x) dx$ .      B.  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ .

C.  $\int_0^{\pi} f(\sin x) dx = \pi \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$ .      D.  $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx$ .

**Câu 17.** Cho  $2\sqrt{3}m - \int_0^1 \frac{4x^3}{(x^4+2)^2} dx = 0$ . Khi đó  $144m^2 - 1$  bằng:

A.  $-\frac{2}{3}$ .      B.  $4\sqrt{3}-1$ .      C.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ .      D. Kết quả khác.

**Câu 18.** Tính tích phân  $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$ .

A.  $I = 2$ .      B.  $I = \frac{\ln^2 2}{2}$ .      C.  $I = \ln 2$ .      D.  $I = -\frac{\ln^2 2}{2}$ .

**Câu 19.** Biến đổi  $\int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln x + 2)^2} dx$  thành  $\int_2^3 f(t) dt$ , với  $t = \ln x + 2$ . Khi đó  $f(t)$  là hàm nào trong các hàm số sau?

A.  $f(t) = \frac{2}{t^2} - \frac{1}{t}$ .    B.  $f(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{2}{t}$ .    C.  $f(t) = \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t}$ .    D.  $f(t) = -\frac{2}{t^2} + \frac{1}{t}$ .

**Câu 20.** Kết quả của tích phân  $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln^2 x + 1)} dx$  có dạng  $I = a \ln 2 + b$  với  $a, b \in \mathbb{Q}$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

A.  $2a + b = 1$ .    B.  $a^2 + b^2 = 4$ .    C.  $a - b = 1$ .    D.  $ab = 2$ .

**Câu 21.** Tính tích phân  $I = \int_0^1 x e^{x^2} dx$ .

A.  $I = \frac{e}{2}$ .      B.  $I = \frac{e+1}{2}$ .      C.  $I = \frac{e-1}{2}$ .      D.  $I = e$ .

**Câu 22.** Cho  $I = \int_0^{\ln 2} e^x \sqrt{e^x - 1} dx$  và  $t = \sqrt{e^x - 1}$ .

Chọn khẳng định sai trong các khẳng định sau:

A.  $I = 2 \int_0^1 t^2 dt$ .    B.  $I = \int_0^1 t^2 dt$ .    C.  $I = \frac{2t^3}{3} \Big|_0^1$ .    D.  $I = \frac{2}{3}$ .

**Câu 23.** Biến đổi  $\int_1^{\ln 3} \frac{dx}{e^x + 1}$  thành  $\int_1^3 f(t) dt$ , với  $t = e^x$ . Khi đó  $f(t)$  là hàm nào trong các hàm số sau?

A.  $f(t) = \frac{1}{t^2 - t}$ .    B.  $f(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{t+1}$ .    C.  $f(t) = \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t}$ .    D.  $f(t) = \frac{1}{t^2 + t}$ .

**Câu 24.** Tìm  $a$  biết  $I = \int_{-1}^2 \frac{e^x dx}{2 + e^x} = \ln \frac{ae + e^3}{ae + b}$  với  $a, b$  là các số nguyên dương.

A.  $a = \frac{1}{3}$ .      B.  $a = -\frac{1}{3}$ .      C.  $a = 2$ .      D.  $a = -2$ .

**Câu 25.** Để tính tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cos x dx$  ta chọn cách đặt nào sau đây cho phù hợp?

A. Đặt  $t = e^{\sin x}$ .    B. Đặt  $t = \sin x$ .    C. Đặt  $t = \cos x$ .    D. Đặt  $t = e^x$ .

**Câu 26.** Cho tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x} \sin x \cos^3 x dx$ .

Nếu đổi biến số  $t = \sin^2 x$  thì:

A.  $I = \frac{1}{2} \int_0^1 e^t (1-t) dt$ .      B.  $I = 2 \left[ \int_0^1 e^t dt + \int_0^1 t e^t dt \right]$ .

C.  $I = 2 \int_0^1 e^t (1-t) dt$ .      D.  $I = \frac{1}{2} \left[ \int_0^1 e^t dt + \int_0^1 t e^t dt \right]$ .

**Câu 27.** Biến đổi  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x} \sin 2x dx$  thành  $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(t) dt$ , với  $t = \sin^2 x$ . Khi đó  $f(t)$  là hàm nào trong các hàm

số sau?

A.  $f(t) = e^t \sin 2t$ .

B.  $f(t) = e^t$ .

C.  $f(t) = e^t \sin t$ . D.  $f(t) = \frac{1}{2} e^t$ .

**Câu 28.** Tính tích phân  $I = \int_0^{\pi} \cos^3 x \sin x dx$ .

A.  $I = -\frac{1}{4} \pi^4$ .

B.  $I = -\pi^4$ .

C.  $I = 0$ .

D.  $I = -\frac{1}{4}$ .

**Câu 29.** Tính tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x (1 + \sin^2 x)^3 dx$ .

A.  $I = \frac{\pi^4}{64}$ .

B.  $I = \frac{15}{4}$ .

C.  $I = \frac{31}{4}$ .

D.  $I = \frac{7}{4}$ .

**Câu 30** Cho tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{6 \tan x}{\cos^2 x \sqrt{3 \tan x + 1}} dx$ . Giả sử đặt  $u = \sqrt{3 \tan x + 1}$  thì ta được:

A.  $I = \frac{4}{3} \int_1^2 (2u^2 + 1) du$ .

B.  $I = \frac{4}{3} \int_1^2 (u^2 + 1) du$ .

C.  $I = \frac{4}{3} \int_1^2 (u^2 - 1) du$ .

D.  $I = \frac{4}{3} \int_1^2 (2u^2 - 1) du$ .

**Câu 31.** Tính tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos x)^n \sin x dx$  bằng:

A.  $I = \frac{1}{n+1}$ .

B.  $I = \frac{1}{n-1}$ .

C.  $I = \frac{1}{2n}$ .

D.  $I = \frac{1}{n}$ .

**Câu 32.** Nếu  $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^n x \cos x dx = \frac{1}{64}$  thì  $n$  bằng:

A.  $n = 3$ .

B.  $n = 4$ .

C.  $n = 6$ .

D.  $n = 5$ .

**Câu 33.** Tính tích phân  $I = \int_1^2 \ln t dt$ . Chọn khẳng định sai?

A.  $I = 2 \ln 2 - 1$ .

B.  $\ln \frac{4}{e}$ .

C.  $\ln 4 - \log 10$ .

D.  $\ln 4e$ .

**Câu 34.** Biết  $I = \int_1^a \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2$ . Giá trị của  $a$  bằng:

A. 2.

B.  $\ln 2$ .

C. 4.

D. 8.

**Câu 35.** Kết quả của tích phân  $I = \int_2^3 \ln(x^2 - x) dx$  được viết ở dạng  $I = a \ln 3 - b$  với  $a, b$  là các số nguyên. Khi đó  $a - b$  nhận giá trị nào sau đây?

A. -1.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

**Câu 36.** Tính tích phân  $I = \int_1^e x \ln x dx$ .

A.  $I = \frac{1}{2}$ .

B.  $I = \frac{e^2 - 2}{2}$ .

C.  $I = \frac{e^2 + 1}{4}$ .

D.  $I = \frac{e^2 - 1}{4}$ .



**Câu 37.** Khẳng định nào sau đây **đúng** về kết quả  $\int_1^e x^3 \ln x dx = \frac{3e^a + 1}{b}$  ?

- A.  $ab = 64$ .      B.  $ab = 46$ .      C.  $a - b = 12$ .      D.  $a - b = 4$ .

**Câu 38.** Kết quả của tích phân  $I = \int_0^1 x \ln(2 + x^2) dx$  được viết ở dạng  $I = a \ln 3 + b \ln 2 + c$  với  $a, b, c$  là các số hữu tỉ. Hỏi tổng  $a + b + c$  bằng bao nhiêu?

- A. 0.      B. 1.      C.  $\frac{3}{2}$ .      D. 2.

**Câu 39.** Cho  $I = \int_1^e \ln \frac{k}{x} dx$ . Xác định  $k$  để  $I < e - 2$ .

- A.  $k < e + 2$ .      B.  $k < e$ .      C.  $k > e + 1$ .      D.  $k < e - 1$ .

**Câu 40.** Tính tích phân  $I = \int_0^1 x 2^x dx$ .

- A.  $I = \frac{2 \ln 2 - 1}{\ln^2 2}$ .      B.  $I = \frac{2 \ln 2 - 1}{\ln 2}$ .      C.  $I = \frac{2 \ln 2 + 1}{\ln^2 2}$ .      D.  $I = \frac{2 \ln 2 + 1}{\ln 2}$ .

**Câu 131.** Kết quả tích phân  $I = \int_0^1 (2x + 3)e^x dx$  được viết dưới dạng  $I = ae + b$  với  $a, b \in \mathbb{Q}$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.  $a - b = 2$ .      B.  $a^3 + b^3 = 28$ .      C.  $ab = 3$ .      D.  $a + 2b = 1$ .

**Câu 41.** Tích phân  $\int_0^{\sqrt{a}} (x - 1)e^{2x} dx = \frac{3 - e^2}{4}$ . Giá trị của  $a > 0$  bằng:

- A. 1.      B. 2.      C. 3.      D. 4.

**Câu 42.** Tính tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin 2x dx$ .

- A.  $I = 1$ .      B.  $I = \frac{\pi}{2}$ .      C.  $I = \frac{1}{4}$ .      D.  $I = \frac{3}{4}$ .

**Câu 43.** Cho tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin x + 2m) dx = 1 + \pi^2$ . Giá trị của tham số  $m$  là:

- A. 5.      B. 3.      C. 4.      D. 6.

**Câu 135.** Cho  $\frac{\pi}{m} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = 1$ . Khi đó  $9m^2 - 6$  bằng:

- A. 3.      B. 30.      C. -3.      D. -30.

**Câu 44.** Kết quả của tích phân  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x - 1 - \sin x) dx$  được viết ở dạng  $\pi \left( \frac{\pi}{a} - \frac{1}{b} \right) - 1$ . Khẳng định nào sau đây là sai?

- A.  $a + 2b = 8$ .      B.  $a + b = 5$ .      C.  $2a - 3b = 2$ .      D.  $a - b = 2$ .

**Câu 45.** Với  $t \in (-1; 1)$  ta có  $\int_0^t \frac{dx}{x^2 - 1} = -\frac{1}{2} \ln 3$ . Khi đó giá trị  $t$  là:

- A.  $\frac{1}{3}$ .      B.  $-\frac{1}{3}$ .      C. 0.      D.  $\frac{1}{2}$ .

**Câu 46.** Cho tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot e^{\sin x} dx$ . Một học sinh giải như sau:

**Bước 1:** Đặt  $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$ . Đổi cận  $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow t=1 \end{cases} \Rightarrow I = 2 \int_0^1 t e^t dt$ .

**Bước 2:** Chọn  $\begin{cases} u=t \\ dv=e^t dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dt \\ v=e^t \end{cases}$ . Suy ra  $\int_0^1 t e^t dt = t e^t \Big|_0^1 - \int_0^1 e^t dt = e - e^t \Big|_0^1 = 1$ .

**Bước 3:**  $I = 2 \int_0^1 t e^t dt = 2$ .

Hỏi bài giải trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai ở đâu?

- A. Bài giải trên sai từ Bước 1.      B. Bài giải trên sai từ Bước 2.  
C. Bài giải trên hoàn toàn đúng.      D. Bài giải trên sai từ Bước 3.

**Câu 48.** Cho  $I = \int_0^{\pi} e^x \cos^2 x dx$ ,  $J = \int_0^{\pi} e^x \sin^2 x dx$  và  $K = \int_0^{\pi} e^x \cos 2x dx$ . Khẳng định nào **đúng** trong các khẳng định sau?

- (I).  $I + J = e^{\pi}$ .      (II).  $I - J = K$ .      (III).  $K = \frac{e^{\pi} - 1}{5}$ .

- A. Chỉ (I).      B. Chỉ (II).      C. Chỉ (III).      D. Cả (II) và (III).

**Câu 49.** Cho  $I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x} dx$  với  $n \in \mathbb{N}$ . Giá trị của  $I_0 + I_1$  là:

- A. 0.      B. 1.      C. 2.      D. 3.

**Câu 50.** Cho hai hàm số  $y = f(x)$  và  $y = g(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $1;2$ . Biết  $f(1) \cdot g(1) = 1$ ,  $f(2) \cdot g(2) = 2$  và  $\int_1^2 g(x) \cdot f'(x) dx = 3$ . Tính  $I = \int_1^2 f(x) \cdot g'(x) dx$ .

- A.  $I = -4$ .      B.  $I = 4$ .      C.  $I = -2$ .      D.  $I = 2$ .

## ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

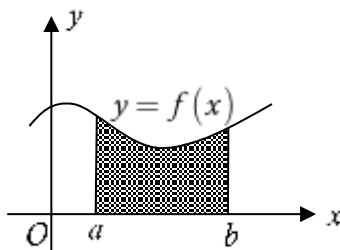
### A. Lí thuyết

#### 1. Tính diện tích hình phẳng

##### Định lí.

Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục, không âm trên đoạn  $[a; b]$ . Khi đó diện tích  $S$  của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = f(x)$ , trục hoành và hai đường thẳng  $x = a$ ,  $x = b$  là

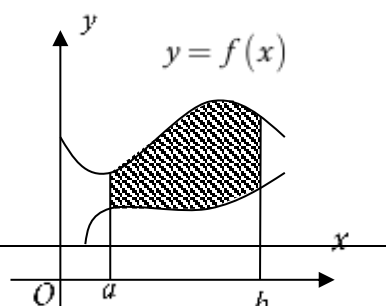
$$S = \int_a^b f(x) dx.$$



**Bài toán 1.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[a; b]$ . Khi đó diện tích  $S$  của hình phẳng  $(D)$  giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = f(x)$ ; trục hoành  $Ox$  ( $y = 0$ ) và hai đường thẳng  $x = a$ ;  $x = b$  là  $S = \int_a^b |f(x)| dx$ .

**Bài toán 2.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị  $y = f(x)$ ;  $y = g(x)$  và hai đường thẳng  $x = a$ ;  $x = b$  là

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$



Chú ý:

1) Để phá bỏ dấu giá trị tuyệt đối ta thường làm như sau:

- Giải phương trình  $f(x) = g(x)$  tìm nghiệm  $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a; b)$  ( $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ ).

- Tính  $S = \int_a^{x_1} |f(x) - g(x)| dx + \int_{x_1}^{x_2} |f(x) - g(x)| dx + \dots + \int_{x_n}^b |f(x) - g(x)| dx$

$$= \left| \int_a^{x_1} (f(x) - g(x)) dx \right| + \dots + \left| \int_{x_n}^b (f(x) - g(x)) dx \right|.$$

Ngoài cách trên, ta có thể dựa vào đồ thị để bỏ dấu giá trị tuyệt đối.

2) Trong nhiều trường hợp, bài toán yêu cầu tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị  $y = f(x)$ ;  $y = g(x)$ .

Khi đó, ta có công thức tính như sau  $S = \int_{x_1}^{x_2} |f(x) - g(x)| dx$ .

Trong đó  $x_1$  và  $x_2$  tương ứng là nghiệm nhỏ nhất, lớn nhất của phương trình  $f(x) = g(x)$ .

#### 2. Tính thể tích khối tròn xoay

##### a) Tính thể tích của vật thể

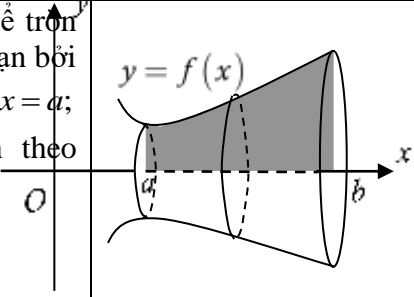
##### Định lí.

Cắt một vật thể  $C$  bởi hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$  vuông góc với trục  $Ox$  lần lượt tại

$x = a, x = b$  ( $a < b$ ). Một mặt phẳng bất kì vuông góc với  $Ox$  tại điểm  $x$  ( $a \leq x \leq b$ ) cắt  $C$  theo một thiết diện có diện tích  $S(x)$ . Giả sử  $S(x)$  là hàm liên tục trên đoạn  $[a; b]$ . Khi đó thể tích của vật thể  $C$  giới hạn bởi hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$  được tính theo công thức  $V = \int_a^b S(x) dx$ .

### b) Tính thể tích vật tròn xoay

**Bài toán 1.** Tính thể tích vật thể tròn xoay khi quay miền  $D$  được giới hạn bởi các đường  $y = f(x); y = 0; x = a; x = b$  quanh trục  $Ox$  được tính theo công thức

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$


*Chú ý:* Nếu hình phẳng  $D$  được giới hạn bởi các đường  $y = f(x); y = g(x)$  và hai đường  $x = a; x = b$  (với  $f(x).g(x) \geq 0, \forall x \in [a; b]$ ) thì thể tích khối tròn xoay sinh bởi khi quay  $D$  quanh trục  $Ox$  được tính bởi công thức

$$V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx.$$

**Bài toán 2.** Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng  $D$  giới hạn bởi các đường  $x = g(y)$ , trục tung và hai đường  $y = a, y = b$  quanh trục  $Oy$  được tính theo công thức

$$V = \pi \int_a^b g^2(y) dy.$$

## B. Ví dụ

**Bài 1.** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi :

- Đồ thị hàm số  $y = x^3$ , trục hoành và hai đường thẳng  $x = -2, x = 2$ , Ta có trên  $[-2; 0], x^3 \leq 0$ . Trên  $[0; 2] x^3 \geq 0$ .
- Đồ thị hàm số  $y = x + x^{-1}$ , trục hoành, đường thẳng  $x = 1$  và  $x = 2$
- Đồ thị hàm số  $y = e^x + 1$ , trục hoành, đường thẳng  $x = 0$  và đường thẳng  $x = 1$
- Đồ thị hàm số  $y = x^3 - 4x$ , trục hoành, đường thẳng  $x = 2$  và đường thẳng  $x = 4$

### Hướng dẫn

$$a) S = \int_{-2}^2 |x^3| dx = \int_{-2}^0 (-x^3) dx + \int_0^2 x^3 dx = -\frac{x^4}{4} \Big|_{-2}^0 + \frac{x^4}{4} \Big|_0^2 = -\frac{1}{4} \cdot (-16) + \frac{1}{4} \cdot 16 = 8 \quad (\text{ĐVDT})$$

$$b) S = \int_1^2 \left( x + \frac{1}{x} \right) dx = \left( \frac{x^2}{2} + \ln x \right) \Big|_1^2 = 2 + \ln 2 - \frac{1}{2} - \ln 1 = \frac{3}{2} - \ln 2$$

$$c) S = \int_0^1 (e^x + 1) dx = (e^x + x) \Big|_0^1 = e + 1 - 1 = e$$

$$d) S = \int_2^4 (x^3 - 4x) dx = \left( \frac{x^4}{4} - 2x^2 \right) \Big|_2^4 = 36 \text{ (ĐVDT)}$$

**Bài 2:** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi.

a) Đồ thị hàm số  $y = x^3 - x$ ;  $y = x - x^2$ . Đặt  $f_1(x) = x^3 - x$ ,  $f_2(x) = x - x^2$

b) Đồ thị hàm số  $y = \cos x$ ,  $y = \sin x$ , đường thẳng  $x = \frac{\pi}{2}$ ;  $x = \frac{3\pi}{2}$ .

c) Đồ thị hàm số (H): 
$$\begin{cases} y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \\ y = 1 - x \\ x = 0, x = 2 \end{cases}$$

### Hướng dẫn

a) Ta có  $f_1(x) - f_2(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0$  có 3 nghiệm  $x = -2$ ;  $x = 0$ ;  $x = 1$

Vậy: Diện tích hình phẳng đã cho là:

$$S = \int_{-2}^1 |x^3 + x^2 - 2x| dx = \left| \int_{-2}^0 (x^3 + x^2 - 2x) dx \right| + \left| \int_0^1 (x^2 + x^2 - 2x) dx \right| = \frac{37}{12}$$

b) Đặt  $f_1(x) = \cos x$ ,  $f_2(x) = \sin x$  ;

Ta có  $f_1(x) - f_2(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{4} \in \left[ \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right]$

Diện tích hình phẳng đã cho là:

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\cos x - \sin x| dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{4}} |\sin x - \cos x| dx + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} |\cos x - \sin x| dx \\ &= \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x) dx \right| + \left| \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} (\cos x - \sin x) dx \right| = \left| -(\cos x + \sin x) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{4}} \right| + \left| (\sin x + \cos x) \Big|_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} \right| = \\ &= \left| -\left( -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 1 \right| + \left| (-1) - \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right| = |\sqrt{2} + 1| + |-1 + \sqrt{2}| = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) S(H) &= \int_0^2 |(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) - (1 - x)| dx \\ &= \int_0^2 |x^3 - 3x^2 + 4x - 2| dx \\ &= \int_0^1 (-x^3 + 3x^2 - 4x + 2) dx + \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 4x - 2) dx \\ &= \left( -\frac{x^4}{4} + x^3 - 2x^2 + 2x \right) \Big|_0^1 + \left( \frac{x^4}{4} - x^3 + 2x^2 - 2x \right) \Big|_1^2 \end{aligned}$$

$$= \left( -\frac{1}{4} + 1 - 2 + 2 \right) + \left[ (4 - 8 + 8 - 4) - \left( \frac{1}{4} - 1 + 2 - 2 \right) \right] = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$$

**Bài 3.** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi :

a) Trục tung, trục hoành và đồ thị hàm số :  $y = \frac{2x+1}{x+1}$

b) Đồ thị các hàm số :  $y = e^x$ ;  $y = 2$  và đường thẳng  $x=1$

### Hướng dẫn

a) Đồ thị giao với trục hoành tại điểm  $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$  trục tung :  $x = 0$ .

$$\text{Diện tích hình cần tìm là } S = \int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{2x+1}{x+1} dx = \int_{-\frac{1}{2}}^0 \left( \frac{2x+2-2+1}{x+1} \right) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^0 \left( 2 - \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$= \left| \left( 2x - \ln|x+1| \right) \right|_{-\frac{1}{2}}^0 = - \left( -1 - \ln \frac{1}{2} \right) = 1 + \ln 1 - \ln 2 = 1 - \ln 2 \quad (\text{ĐVDT})$$

b) Giải PT :  $e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$  ; Diện tích hình phẳng cần tìm là :

$$S = \int_{\ln 2}^1 |e^x - 2| dx = \int_{\ln 2}^1 (e^x - 2) dx = (e^x - 2x) \Big|_{\ln 2}^1 = (e - 2) - (e^{\ln 2} - 2 \ln 2)$$

$$= (e - 2) - (2 - 2 \ln 2) = e + 2 \ln 2 - 4 \quad (\text{ĐVDT})$$

**Bài 4.** Tính thể tích khối tròn xoay khi quay quanh Ox

a) Đồ thị hàm số  $y = \sin x$ , trục hoành, đường thẳng  $x = \frac{\pi}{2}$ ,  $x = \pi$ .

b) Đồ thị hàm số  $y = \cos x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{4}$

c) Đồ thị hàm số  $y = xe^x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$

d) Đồ thị hàm số :  $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2$  và các đường  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 3$ .

### Hướng dẫn

a) Ta có:  $V = \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1 - \cos 2x) dx = \frac{\pi}{2} \left( x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\pi}{2} \left( \pi - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi^2}{4} \quad (\text{ĐVTT})$

b) Ta có:  $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2x) dx = \frac{\pi}{2} \left( x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{ĐVTT})$

c) Ta có:  $V = \pi \int_0^1 x^2 e^{2x} dx$  Đặt :  $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}$

$$V = \frac{\pi}{2} x^2 e^{2x} \Big|_0^1 - \pi \int_0^1 x e^x dx = \frac{\pi}{2} \cdot e^2 - \pi \int_0^1 x e^x dx$$

$$\text{Tính } I = \int_0^1 x.e^{2x} dx \quad \text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \frac{x}{2} e^{2x} \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{4} e^{2x} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4}$$

$$\text{Thay } I \text{ vào } V \text{ ta có : } V = \frac{\pi}{2} .e^2 - \pi \int_0^1 x.e^{2x} dx = \frac{\pi e^2}{2} - \pi \left( \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{4} (e^2 - 1) (\text{ĐVTT})$$

$$\text{d) } V = \pi \int_0^3 \left( \frac{1}{3} x^3 - x^2 \right)^2 dx = \pi \int_0^3 \left( \frac{1}{9} x^6 - \frac{2}{3} x^5 + x^4 \right) dx = \pi \left( \frac{x^7}{63} - \frac{x^6}{9} + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^3 = \frac{81\pi}{35} (\text{ĐVTT})$$

### C. Bài tập tự luận

#### TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG

1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: (C):  $y = 4 - x^2$ ,  $y = 0$  và hai đường thẳng  $x = 1$ ,  $x = 3$ .

2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:  $y = -x^2 + 4x$  và  $y = x$

3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:  $y = x^2 - x + 3$  và  $y = 2x + 1$

4. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: (C):  $y = x\sqrt{1+x^2}$ ,  $y = 0$  và đường thẳng  $x = 1$ .

5. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: (C):  $y = \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}$ , trục Ox và hai đường thẳng  $x = 1$ ,  $x = e$ .

6. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: (C):  $y = xe^x$ , trục Ox và hai đường thẳng  $x = -1$ ,  $x = 2$ .

7. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: (C):  $y = \frac{1}{x}$  và đường thẳng  $y = -2x + 3$ .

8. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:  $y = \sin 2x$ ,  $y = \cos x$  và hai đường thẳng  $x = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$ .

9. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:  $y = |x^2 - 4x + 3|$  và  $y = x + 3$

10. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:  $y = x^2$ ,  $y = \sqrt{2-x^2}$

#### TÍNH THỂ TÍCH VẬT THỂ TRÒN XOAY

1. Cho hình phẳng H giới hạn bởi các đường  $y = x^3$ ,  $y = 5$ ,  $x = 1$ ,  $x = 3$ . Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình H quanh trục Ox

2. Cho hình phẳng H giới hạn bởi các đường  $y = x^2 + 3x + 2$ ,  $y = x + 4$ ,  $x = 2$ ,  $x = 5$  Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình H quanh trục Ox.

3. Tính thể tích của vật thể tròn xoay sinh ra bởi phép quay quanh trục  $Ox$  của hình phẳng giới hạn bởi trục  $Ox$  và đường  $y = \sin x$ ,  $x = 0, x = \pi$
4. Tính thể tích khối tròn xoay được tạo bởi phép quay quanh trục  $Ox$ , hình phẳng giới hạn bởi các đường:  $y = x^2 - 4x + 3$ ,  $y = 0$ .
5. Tính thể tích khối tròn xoay được tạo bởi phép quay quanh trục  $Ox$ , hình phẳng giới hạn bởi các đường:  $y = \frac{\sqrt{xe^x}}{e^x + 1}$ ,  $y = 0$  và  $x = 1$

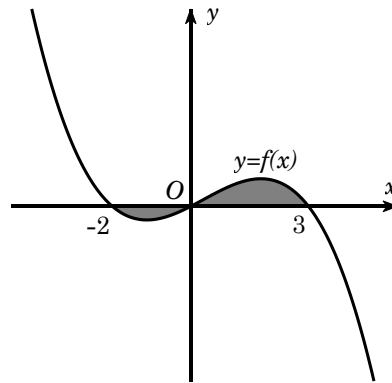
### C. Bài tập trắc nghiệm

**Câu 1.** Viết công thức tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = f(x)$ , trục hoành và hai đường thẳng  $x = a, x = b$  ( $a < b$ ) là:

- A.  $S = \int_a^b f(x) dx$ .      B.  $S = \int_a^b |f(x)| dx$ .      C.  $S = \int_a^b f^2(x) dx$ .      D.  $S = \pi \int_a^b |f(x)| dx$ .

**Câu 2.** Cho đồ thị hàm số  $y = f(x)$ . Diện tích  $S$  của hình phẳng (phần tô đậm trong hình dưới) là:

- A.  $S = \int_{-2}^3 f(x) dx$ .
- B.  $S = \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^3 f(x) dx$ .
- C.  $S = \int_0^{-2} f(x) dx + \int_0^3 f(x) dx$ .
- D.  $S = \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_3^0 f(x) dx$ .



**Câu 3.** Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số  $y = x^3 + 2x$  và  $y = 3x^2$  được tính theo công thức:

- A.  $S = \int_0^2 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx$ .      B.  $S = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx - \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx$ .
- C.  $\int_0^2 (-x^3 + 3x^2 - 2x) dx$ .      D.  $S = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx + \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx$ .

**Câu 4.** Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số  $y = x^2 + 2$  và  $y = 3x$  là:

- A.  $S = 2$ .      B.  $S = 3$ .      C.  $S = \frac{1}{2}$ .      D.  $S = \frac{1}{6}$ .

**Câu 5.** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = x^3 - x$  và đồ thị hàm số  $y = x - x^2$ .

- A.  $S = \frac{37}{12}$ .      B.  $S = \frac{9}{4}$ .      C.  $S = \frac{81}{12}$ .      D.  $S = 13$ .

**Câu 6.** Kết quả của diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = -x^3 + 3x^2 - 2$ , trục hoành, trục tung và đường thẳng  $x = 2$  có dạng  $\frac{a}{b}$  (với  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản). Khi đó mối liên hệ giữa  $a$  và  $b$  là:

- A.  $a - b = 2$ .      B.  $a - b = 3$ .      C.  $a - b = -2$ .      D.  $a - b = -3$ .

**Câu 7.** Kết quả của việc tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị  $(C): y = x^4 - 2x^2 + 1$  và trục  $Ox$  gần nhất với giá trị nào sau đây?

- A.  $S = \frac{1}{2}$ .      B.  $S = 1$ .      C.  $S = \frac{3}{2}$ .      D.  $S = 2$ .



**Câu 8.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = x\sqrt{1+x^2}$ , trục hoành và đường thẳng  $x=1$  là:

A.  $S = \frac{1}{3}$ .      B.  $S = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$ .      C.  $S = \frac{2\sqrt{2}+1}{3}$ .      D.  $S = 2(\sqrt{2}-1)$ .

**Câu 9.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = \sqrt{x}$  và  $x-2y=0$  bằng với diện tích hình nào sau đây:

- A. Diện tích hình vuông có cạnh bằng 2.  
B. Diện tích hình chữ nhật có chiều dài, chiều rộng lần lượt 5 và 3.  
C. Diện tích hình tròn có bán kính bằng 3.  
D. Diện tích toàn phần khối tứ diện đều có cạnh bằng  $\frac{2\sqrt[4]{3}}{3}$ .

**Câu 10.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = \frac{2}{(x+1)^2}$ , trục hoành, đường thẳng  $x=0$  và

đường thẳng  $x=4$  là:

A.  $S = -\frac{8}{5}$ .      B.  $S = \frac{8}{5}$ .      C.  $S = \frac{2}{25}$ .      D.  $S = \frac{4}{25}$ .

**Câu 11.** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = x \ln x$ , trục hoành và đường thẳng  $x=e$ .

A.  $S = \frac{e^2+1}{4}$ .      B.  $S = \frac{e^2+1}{6}$ .      C.  $S = \frac{e^2+1}{8}$ .      D.  $S = \frac{e^2+1}{2}$ .

**Câu 12.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = e^x + x$ , trục hoành, trục tung và đường thẳng  $x=1$  là:

A.  $S = e + \frac{1}{2}$ .      B.  $S = e - \frac{1}{2}$ .      C.  $S = e + 1$ .      D.  $S = e - 1$ .

**Câu 13.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = e^x + x$ ,  $x - y + 1 = 0$  và  $x = \ln 5$  là:

A.  $S = 5 + \ln 4$ .      B.  $S = 5 - \ln 4$ .      C.  $S = 4 + \ln 5$ .      D.  $S = 4 - \ln 5$ .

**Câu 14.** Gọi  $S$  là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = (e+1)x$  và  $y = (1+e^x)x$ . Giá trị  $S$  cần tìm là:

A.  $S = \frac{e+2}{2}$ .      B.  $S = \frac{e}{2}$ .      C.  $S = \frac{e-2}{2}$ .      D.  $S = \frac{e-2}{4}$ .

**Câu 15.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = \sqrt{e^x+1}$ , trục hoành và hai đường thẳng  $x = \ln 3$ ,  $x = \ln 8$  nhận giá trị nào sau đây:

A.  $S = 2 + \ln \frac{2}{3}$ .      B.  $S = 2 + \ln \frac{3}{2}$ .      C.  $S = 3 + \ln \frac{3}{2}$ .      D.  $S = 2 - \ln \frac{3}{2}$ .

**Câu 16.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol  $(P): y = x^2 - 2x + 2$ , tiếp tuyến với nó tại điểm  $M(3;5)$  và trục  $Oy$  là giá trị nào sau đây?

A.  $S = 4$ .      B.  $S = 27$ .      C.  $S = 9$ .      D.  $S = 12$ .

**Câu 17.** Cho hàm số  $y = x^2 - 2x + 2$  có đồ thị  $(C)$ . Phương trình tiếp tuyến của  $(C)$  tại điểm có hoành độ bằng 3 có đồ thị  $\Delta$ . Gọi  $S$  là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị  $(C)$ , đường thẳng  $\Delta$  và trục tung. Giá trị của  $S$  là:

A.  $S = 9$ .      B.  $S = \frac{9}{2}$ .      C.  $S = \frac{9}{4}$ .      D.  $S = \frac{9}{10}$ .

**Câu 18.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = 4 - \frac{1}{x^2}$  đường thẳng  $y = -1$ , đường thẳng  $y = 1$  và trục tung được tính như sau:

$$\text{A. } S = \int_{-1}^1 \left(4 - \frac{1}{x^2}\right) dx.$$

$$\text{B. } S = \int_{-1}^1 \left|4 - \frac{1}{x^2}\right| dx.$$

$$\text{C. } S = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{4-y}} dy.$$

$$\text{D. } S = \int_{-1}^1 \frac{-1}{\sqrt{4-y}} dy.$$

**Câu 19.** Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong có phương trình  $x - y^2 = 0$  và  $x + 2y^2 - 12 = 0$  bằng:

- A.  $S = 15$ .      B.  $S = 32$ .      C.  $S = 25$ .      D.  $S = 30$ .

**Câu 20.** Với giá trị nào của  $a$  để diện tích  $S$  của hình phẳng giới hạn bởi  $(C): y = \frac{x^2 - 2x}{x - 1}$ , đường tiệm cận xiên của  $(C)$  và hai đường thẳng  $x = a, x = 2a$  ( $a > 1$ ) bằng  $\ln 3$ ?

- A.  $a = 1$ .      B.  $a = 2$ .      C.  $a = 3$ .      D.  $a = 4$ .

**Câu 21.** Viết công thức tính thể tích  $V$  của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = f(x)$ , trục  $Ox$  và hai đường thẳng  $x = a, x = b$  ( $a < b$ ), xung quanh trục  $Ox$ .

$$\text{A. } V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

$$\text{B. } V = \int_a^b f^2(x) dx.$$

$$\text{C. } V = \pi \int_a^b f(x) dx.$$

$$\text{D. } V = \int_a^b |f(x)| dx.$$

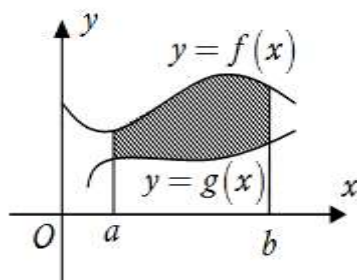
**Câu 22.** Cho hình phẳng trong hình (phần tô đậm) quay quanh trục hoành. Thể tích khối tròn xoay tạo thành được tính theo công thức nào?

$$\text{A. } V = \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx.$$

$$\text{B. } V = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx.$$

$$\text{C. } V = \pi \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx.$$

$$\text{D. } V = \pi \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$



**Câu 23.** Viết công thức tính thể tích  $V$  của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục  $Ox$  tại các điểm  $x = a, x = b$  ( $a < b$ ), có thiết diện bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục  $Ox$  tại điểm có hoành độ  $x$  ( $a \leq x \leq b$ ) là  $S(x)$ .

$$\text{A. } V = \pi \int_a^b S(x) dx.$$

$$\text{B. } V = \pi \int_a^b |S(x)| dx.$$

$$\text{C. } V = \int_a^b S(x) dx.$$

$$\text{D. } V = \pi^2 \int_a^b S(x) dx.$$

**Câu 24.** Kí hiệu  $(H)$  là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = 2(x-1)e^x$ , trục tung và trục hoành. Tính thể tích  $V$  của khối tròn xoay thu được khi quay hình  $(H)$  xung quanh trục  $Ox$ .

- A.  $V = 4 - 2e$ .      B.  $V = (4 - 2e)\pi$ .      C.  $V = e^2 - 5$ .      D.  $V = (e^2 - 5)\pi$ .

**Câu 25.** Thể tích của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng  $x = 0$  và  $x = 3$ , có thiết diện bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục  $Ox$  tại điểm có hoành độ  $x$  ( $0 \leq x \leq 3$ ) là một hình chữ nhật có hai kích

thước bằng  $x$  và  $2\sqrt{9-x^2}$ , bằng:

- A.  $V = 3$ .      B.  $V = 18$ .      C.  $V = 20$ .      D.  $V = 22$ .

**Câu 26.** Tính thể tích vật thể nằm giữa hai mặt phẳng có phương trình  $x = 0$  và  $x = 2$ , biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục  $Ox$  tại điểm có hoành độ  $x \in [0; 2]$  là một phần tư đường tròn bán kính  $\sqrt{2x^2}$ , ta được kết quả nào sau đây?

- A.  $V = 32\pi$ .      B.  $V = 64\pi$ .      C.  $V = \frac{16}{5}\pi$ .      D.  $V = 8\pi$ .

**Câu 27.** Hình phẳng  $C$  giới hạn bởi các đường  $y = x^2 + 1$ , trục tung và tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = x^2 + 1$  tại điểm  $(1; 2)$ , khi quay quanh trục  $Ox$  tạo thành khối tròn xoay có thể tích bằng:

- A.  $V = \frac{4}{5}\pi$ .      B.  $V = \frac{28}{15}\pi$ .      C.  $V = \frac{8}{15}\pi$ .      D.  $V = \pi$ .

**Câu 28.** Khối tròn xoay tạo nên khi ta quay quanh trục  $Ox$  hình phẳng  $D$  giới hạn bởi đồ thị  $(P): y = 2x - x^2$  và trục  $Ox$  sẽ có thể tích là:

- A.  $V = \frac{16\pi}{15}$ .      B.  $V = \frac{11\pi}{15}$ .      C.  $V = \frac{12\pi}{15}$ .      D.  $V = \frac{4\pi}{15}$ .

**Câu 29.** Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số  $y = 2x - x^2$  và  $y = x$  khi quay quanh trục  $Ox$  tạo thành khối tròn xoay có thể tích bằng:

- A.  $V = \frac{\pi}{3}$ .      B.  $V = \frac{\pi}{4}$ .      C.  $V = \frac{\pi}{5}$ .      D.  $V = \pi$ .

**Câu 30.** Thể tích vật thể tròn xoay sinh ra khi hình phẳng giới hạn bởi các parabol  $y = 4 - x^2$  và  $y = 2 + x^2$  quay quanh trục  $Ox$  là kết quả nào sau đây?

- A.  $V = 10\pi$ .      B.  $V = 12\pi$ .      C.  $V = 14\pi$ .      D.  $V = 16\pi$ .

**Câu 31.** Thể tích vật thể tròn xoay sinh ra khi hình phẳng giới hạn bởi các đường  $4y = x^2$ ,  $y = x$  qua quanh trục hoành bằng bao nhiêu?

- A.  $V = \frac{124\pi}{15}$ .      B.  $V = \frac{126\pi}{15}$ .      C.  $V = \frac{128\pi}{15}$ .      D.  $V = \frac{131\pi}{15}$ .

**Câu 32.** Cho hình phẳng  $(H)$  giới hạn bởi các đường  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = -x$  và  $x = 4$ . Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình  $(H)$  quanh trục hoành nhận giá trị nào sau đây:

- A.  $V = \frac{41\pi}{3}$ .      B.  $V = \frac{40\pi}{3}$ .      C.  $V = \frac{38\pi}{3}$ .      D.  $V = \frac{41\pi}{2}$ .

**Câu 33.** Thể tích của khối tròn xoay tạo nên khi quay quanh trục  $Ox$  hình phẳng giới hạn bởi  $(C): y = \ln x$ , trục  $Ox$  và đường thẳng  $x = e$  là:

- A.  $V = \pi(e - 2)$ .      B.  $V = \pi(e - 1)$ .      C.  $V = \pi e$ .      D.  $V = \pi(e + 1)$ .

**Câu 34.** Thể tích vật thể tròn xoay sinh ra khi hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = -x + 2$ ,  $y = 0$  quay quanh trục  $Oy$ , có giá trị là kết quả nào sau đây?

- A.  $V = \frac{1}{3}\pi$ .      B.  $V = \frac{3}{2}\pi$ .      C.  $V = \frac{32}{15}\pi$ .      D.  $V = \frac{11}{6}\pi$ .