Chuyên đề **PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN**

§ 1 TỌA ĐỘ ĐIỂM VÀ VECTƠ

A. CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN:

I. Tọa độ điểm :

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz:

1. $M(x_M;y_M;z_M) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x_M\vec{i} + y_M\vec{j} + z_M\vec{k}$

2. Cho A(x_A;y_A;z_A) và B(x_B;y_B;z_B) ta có: $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$;

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

3. M là trung điểm AB thì $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$

II. Tọa độ của vécto:

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz .

1. $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3) \Leftrightarrow \vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$

2. Cho $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b} = (b_1;b_2;b_3)$ ta có

◇ $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$

◇ $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3)$

◇ $k.\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$

◇ $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{a};\vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

◇ $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

◇ $\cos\varphi = \cos(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$ (với $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$)

◇ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc $\Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3 = 0$

III. <u>Tích có hướng của hai vectơ và ứng dụng:</u>

Tích có hướng của $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b} = (b_1;b_2;b_3)$ là :

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right] = \left(\begin{vmatrix} a_2 a_3 \\ b_2 b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 a_1 \\ b_3 b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 a_2 \\ b_1 b_2 \end{vmatrix}\right) = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$$

$\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùngphương $\Leftrightarrow \exists k \in R : \vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases}$

<u>1.Tính chất</u> :

◇ $\left[\vec{a},\vec{b}\right] \perp \vec{a}$, $\left[\vec{a},\vec{b}\right] \perp \vec{b}$

◇ $\left\|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right\| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin(\vec{a},\vec{b})$

◇ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow \left[\vec{a},\vec{b}\right] = \vec{0}$

◇ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c} = 0$

<u>2.Các ứng dụng tích có hướng :</u>

◇ Diện tích tam giác : $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\right|$

◇ Thểtích tứ diện $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}\right|$

◇ Thể tích khối hộp:

$V_{ABCDA'B'C'D'} = \left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}].\overrightarrow{AA'}\right|$

V.<u>Phương trình mặt cầu:</u>

1. Mặt cầu (S) tâm I(a;b;c) bán kính r có phương trình là :$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$

2. Phương trình : $x^2 + y^2 + z^2 + 2Ax + 2By + 2Cz + D = 0$ với $A^2+B^2+C^2-D>0$

là phương trình mặt cầu tâm I(-A;-B;-C) , bán kính $r = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - D}$.

IV. <u>Điều kiện khác:</u>*<u>(Kiến thức bổ sung)</u>*

1. Nếu M chia đoạn AB theo tỉ số k ($\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$) thì ta có :

$$x_M = \frac{x_A - kx_B}{1-k}; y_M = \frac{y_A - ky_B}{1-k}; z_M = \frac{z_A - kz_B}{1-k} \quad \text{Với k} \neq 1$$

2. G là trọng tâm của tam giác ABC $\Leftrightarrow x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$

3. G là trọng tâm của tứ diện ABCD $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

VD1: Trong KG Oxyz, cho A(1;1;1), B(–1;2;3), C(0;4;–2).

a) Tìm toạ độ các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AM}$ (M là trung điểm của BC).

b) Tìm toạ độ của vectơ: $\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$

c) Tính các tích vô hướng: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}.(2\overrightarrow{AC})$

Hướng dẫn

$\overrightarrow{AB} = (-2;1;2)$, $\overrightarrow{AC} = (-1;3;-3)$, $\overrightarrow{BC} = (1;2;-5)$,

$\overrightarrow{AM} = \left(-\frac{3}{2};2;-\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB} = (-7;6;3)$

$\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = (0;-5;8)$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (-2)(-1) + 1.3 + 2.(-3) = -1$

VD2. Trong KG Oxyz, cho hình hộp chữ nhật ABCD.A′B′C′D′ có đỉnh A trùng với O, các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$ theo thứ tự cùng hướng với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ và AB = a, AD = b, AA′ = c. Tính toạ độ các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AM}$, với M là trung điểm của cạnh C′D′.

Hướng dẫn

B(a; 0; 0), D(0; b; 0), A′(0; 0;c)

C(a; b; 0), C′(a; b; c), D′(0;b;c)

$\overrightarrow{AB} = (a;0;0)$, $\overrightarrow{AC} = (a;b;0)$

$\overrightarrow{AC'} = (a;b;c)$, $\overrightarrow{AM} = \left(\frac{a}{2};b;c\right)$

VD3. Xác định tâm và bán kính của mặt cầu có phương trình

$x^2+y^2+z^2+4x-2y+6z+5=0$

Hướng dẫn

PT tương đương: $(x+2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=3^2$

Suy ra: a = –2, b = 1, c = –3, r = 3

Kết luận: Tâm I(-2;1;-3) bán kính r = 3

VD4. Viết phương trình mặt cầu (S):

a) (S) có tâm I(1; –3; 5), r = $\sqrt{3}$

b) (S) có tâm I(2; 4; –1) và đi qua điểm A(5; 2; 3)

c) (S) có đường kính AB với A(2; 4; –1), B(5; 2; 3)

Hướng dẫn

a) (S): $(x-1)^2+(y+3)^2+(z-5)^2=3$

b) (S):) $r=IA=\sqrt{29}$ $(x-2)^2+(y-4)^2+(z+1)^2=29$

c) $I\left(\frac{7}{2};3;1\right), r=\frac{\sqrt{29}}{2}$

VD4. Phương trình nào sau đây là pt mặt cầu , nếu là pt mặt cầu xác định tọa độ tâm và bán kính mặt cầu đó.

a) $x^2+y^2+z^2-8x-2y+1=0$

b) $x^2+y^2+z^2+4x+8y-2z-4=0$

c) $x^2+y^2+z^2+8xy-2z-4=0$

d) $3x^2+3y^2+3z^2+4x+8y-2z-4=0$

Hướng dẫn

a) $I(4;1;0)$, R = 4

b) $I(–2;–4;1)$, R = 5

c) ko là pt mặt cầu

d) $I(-\frac{2}{3};-\frac{4}{3};\frac{1}{3}), R = \frac{5}{3}$

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1: Cho bốn điểm A(1;0;0) , B(0;1;0) , C(0;0;1) , D(-2;1;-1)

a) Chứng minh rằng A,B,C,D là bốn đỉnh của tứ diện.
b) Tìm tọa độ trọng tâm G của tứ diện ABCD.
c) Tính các góc của tam giác ABC.
d) Tính diện tích tam giác BCD.
e) Tính thể tích tứ diện ABCD và độ dài đường cao của tứ diện hạ từ đỉnh A.

Bài 3: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'biết A(0,0,0), B(1;0;0), D(0;2;0), A'(0;0;3), C'(1;2;3).

a) Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp.
b) Tính thể tích hình hộp.
c) Chứng tỏ rằng AC' đi qua trọng tâm của hai tam giác A'BD và B'CD'.
d) Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của D lên đoạn A'C.

Bài 4: Trong không gian tọa độ Oxyz cho điểm A(2;3;4). Gọi M_1, M_2, M_3 lần lượt là hình chiếu của A lên ba trục tọa độ Ox;Oy,Oz và N_1, N_2, N_3 là hình chiếu của A lên ba mặt phẳng tọa độ Oxy, Oyz, Ozx.

a) Tìm tọa độ các điểm M_1, M_2, M_3 và N_1, N_2, N_3.

b) Chứng minh rằng $N_1N_2 \perp AN_3$.

c) Gọi P,Q là các điểm chia đoạn N_1N_2, OA theo tỷ số k xác định k để PQ//M_1N_1.

Bài 5: Trong không gian tọa độ Oxyz cho A(1 ; 1 ; 0), B0 ; 2 ; 1), C(1 ; 0 ; 2), D(1 ; 1 ; 1)

a) Chứng minh bốn điểm không đồng phẳng. Tính thể tích tứ diện ABCD.
b) Tìm tọa độ trọng tâm của tam giác ABC, trọng tâm tứ diện ABCD.
c) Tính diện tích các mắt của tứ diện.
d) Tính độ dài các đường cao của khối tứ diện.
e) Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD.
f) Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

Bài 6:a/.Cho ba điểm A(2 ; 5 ; 3), B(3 ; 7 ; 4), C(x ; y ; 6).Tìm x, y để A, B, C thẳng hàng

b/. Cho hai điểm A(-1 ; 6 ; 6), B(3 ; -6 ; -2).Tìm M thuộc mp(Oxy) sao cho

MA + MB nhỏ nhất.

c/. Tìm trên Oy điểm cách đều hai điểm A(3 ; 1 ; 0) và B(-2 ; 4 ; 1).

d/. Tìm trên mặt phẳng Oxz cách đều ba điểm A(1 ; 1; 1), B(-1 ; 1 ; 0),C(3 ;1 ; -1).

e/. Cho hai điểm A(2 ; -1 ; 7), B(4 ; 5 ; -2). Đường thẳng AB cắt mp(Oyz) tại điểm M. Điểm M chia đoạn AB theo tỉ số nào? Tìm tọa độ điểm M.

Bài 7: Cho bốn điểm A(2 ; -1 ; 6), B(-3 ; -1 ; -4), C(5 ; -1 ; 0), D(1 ; 2 ; 1).

a) Chứng minh ABC là tam giác vuông.
b) Tính bán kính đường tròn nội, ngoại tiếp tam giác ABC.
c) Tính độ dài đường phân giác trong của tam giác ABC vẽ từ đỉnh C.

Bài 8 :Viết phương trình mặt cầu trong các trường hợp sau:

a) Tâm I(1 ; 0 ; -1), đường kính bằng 8.
b) Đường kính AB với A(-1 ; 2 ; 1), B(0 ; 2 ; 3)
c) Tâm O(0 ; 0 ; 0) tiếp xúc với mặt cầu tâm I(3 ; -2 ; 4) và bán kính R = 1
d) Tâm I(2 ;-1 ; 3) và đi qua A(7 ; 2 ; 1).
e) Tâm I(-2 ; 1 ; – 3) và tiếp xúc mp(Oxy).

Bài 9 :Viết phương trình mặt cầu trong các trường hợp sau:

a) Đi qua ba điểm A(1 ; 2 ; -4), B(1 ; -3 ; 1), C(2 ; 2 ; 3) và có tâm nằm trên mp(Oxy).

b) Đi qua hai điểm A(3 ; -1 ; 2), B(1 ; 1 ; -2) và có tâm thuộc trục Oz.

c) Đi qua bốn điểm A(1 ; 1 ; 1), B(1 ; 2 ; 1), C(1 ; 1 ; 2), D(2 ; 2 ; 1)

Bài 10 : Cho phương trình $x^2 + y^2 + z^2 – 4mx + 4y + 2mz + m^2 + 4m = 0$.Tìm m để nó là phương trình một mặt cầu và tìm m để bán kính mặt cầu là nhỏ nhất.

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba vecto $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-5\vec{k}$, $\vec{b}=-3\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{c}=-\vec{i}-2\vec{j}$.

Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $\vec{a}=(2;3;-5)$, $\vec{b}=(-3;4;0)$, $\vec{c}=(-1;-2;0)$. **B**. $\vec{a}=(2;3;-5)$, $\vec{b}=(-3;4;0)$, $\vec{c}=(0;-2;0)$.

C. $\vec{a}=(2;3;-5)$, $\vec{b}=(0;-3;4)$, $\vec{c}=(-1;-2;0)$. **D.** $\vec{a}=(2;3;-5)$, $\vec{b}=(1;-3;4)$, $\vec{c}=(-1;-2;1)$.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vecto $\vec{a}=(0;1;3)$ và $\vec{b}=(-2;3;1)$. Nếu $2\vec{x}+3\vec{a}=4\vec{b}$ thì tọa độ của vecto $\vec{x}$ là:

A. $\vec{x}=\left(-4;\frac{9}{2};-\frac{5}{2}\right)$. **B**. $\vec{x}=\left(4;-\frac{9}{2};\frac{5}{2}\right)$.

C. $\vec{x}=\left(4;\frac{9}{2};-\frac{5}{2}\right)$. **D**. $\vec{x}=\left(-4;-\frac{9}{2};\frac{5}{2}\right)$.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba vecto $\vec{a}=(2;-1;3)$, $\vec{b}=(1;-3;2)$ và $\vec{c}=(3;2;-4)$

.Gọi $\vec{x}$ là vectơ thỏa mãn: $\begin{cases}\vec{x}.\vec{a}=-5\\ \vec{x}.\vec{b}=-11\\ \vec{x}.\vec{c}=20\end{cases}$. Tọa độ của vectơ $\vec{x}$ là:

A. $2;3;1$. **B.** $2;3;-2$. **C.** $3;2;-2$. **D.** $1;3;2$.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}=-1;1;0$, $\vec{b}=1;1;0$ và $\vec{c}=1;1;1$.

Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{2}.$ **B.** $\left|\vec{c}\right|=\sqrt{3}.$ **C.** $\vec{a}\perp\vec{b}.$ **D.** $\vec{c}\perp\vec{b}.$

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}=-1;1;0$, $\vec{b}=1;1;0$ và $\vec{c}=1;1;1$.

Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

A. $\vec{a}.\vec{c}=1$. **B.** $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương. **C.** $\cos\vec{b},\vec{c}=\frac{2}{\sqrt{6}}$. **D.** $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$.

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{p}=3,-2,1$, $\vec{q}=-1,1,-2$, $\vec{r}=2,1,-3$ và $\vec{c}=11,-6,5$. Khẳng định nào sau đây là **đúng** ?

A. $\vec{c}=3\vec{p}-2\vec{q}+\vec{r}$. **B.** $\vec{c}=2\vec{p}-3\vec{q}+\vec{r}$.
C. $\vec{c}=2\vec{p}+3\vec{q}+\vec{r}$. **D.** $\vec{c}=3\vec{p}-2\vec{q}-2\vec{r}$.

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a}=2;3;1$, $\vec{b}=-1;5;2$, $\vec{c}=4;-1;3$ và $\vec{x}=-3,22,5$. Đẳng thức nào **đúng** trong các đẳng thức sau?

A. $\vec{x}=2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$. **B.** $\vec{x}=-2\vec{a}+3\vec{b}+\vec{c}$. **C.** $\vec{x}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$. **D.** $\vec{x}=2\vec{a}-3\vec{b}-\vec{c}$.

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}=1;0;-2$, $\vec{b}=-2;1;3$, $\vec{c}=-4;3;5$. Tìm hai số thực m , n sao cho $m.\vec{a}+n.\vec{b}=\vec{c}$ ta được:

A. $m=2;\ n=-3.$ **B.** $m=-2;\ n=-3.$ **C.** $m=2;\ n=3.$ **D.** $m=-2;\ n=3.$

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=2;m+1;-1$ và $\vec{b}=1;-3;2$. Với những giá trị nguyên nào của m thì $\left|\vec{b}\ 2\vec{a}-\vec{b}\right|=4$?

A. -4 . **B.** 4 . **C.** -2 . **D.** 2 .

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u}=m;-2;m+1$ và $\vec{v}=0;m-2;1$.

Tất cả giá trị của m có thể có để hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương là:

A. $m=-1.$ **B.** $m=0.$ **C.** $m=1.$ **D.** $m=2.$

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, để hai vecto $\vec{a}=\ m;2;3\ $ và $\vec{b}=\ 1;n;2\ $ cùng phương, ta phải có:

A. $\begin{cases} m=\dfrac{1}{2} \\ n=\dfrac{4}{3} \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} m=\dfrac{3}{2} \\ n=\dfrac{4}{3} \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} m=\dfrac{3}{2} \\ n=\dfrac{2}{3} \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} m=\dfrac{2}{3} \\ n=\dfrac{4}{3} \end{cases}$.

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vecto $\vec{a}=\ 2;1;-2\ $ và $\vec{b}=\ 0;-\sqrt{2};\sqrt{2}\ $. Tất cả giá trị của m để hai vecto $\vec{u}=2\vec{a}+3m\vec{b}$ và $\vec{v}=m\vec{a}-\vec{b}$ vuông góc là:

A. $\dfrac{\pm\sqrt{26}+\sqrt{2}}{6}$. **B.** $\dfrac{\pm 26+\sqrt{2}}{6}$. **C.** $\dfrac{26\pm\sqrt{2}}{6}$. **D.** $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vecto $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $\left|\vec{a}\right|=2\sqrt{3},\ \left|\vec{b}\right|=3$ và $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=30^0$. Độ dài của vecto $3\vec{a}-2\vec{b}$ bằng:

A. -54. **B.** 54. **C.** 9. **D.** 6.

Câu 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vecto $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $\left|\vec{a}\right|=2\sqrt{3},\ \left|\vec{b}\right|=3$ và $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=30^0$. Độ dài của vecto $\left[5\vec{a},-2\vec{b}\right]$ bằng:

A. $3\sqrt{3}$. **B.** 9. **C.** $30\sqrt{3}$. **D.** 90.

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vecto $\vec{u}$ và $\vec{v}$ thỏa mãn $\left|\vec{u}\right|=2$, $\left|\vec{v}\right|=1$ và $\left(\vec{u},\vec{v}\right)=60^0$. Góc giữa hai vecto $\vec{v}$ và $\vec{u}-\vec{v}$ bằng:

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;0;0),\ B(0;2;0),\ C(0;0;2)$ và $D(2;2;2)$. Gọi $M,\ N$ lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tọa độ trung điểm I của MN là:

A. $I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};1\right)$. **B.** $I(1;1;0)$. **C.** $I(1;-1;2)$. **D.** $I(1;1;1)$.

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vecto $\vec{a}=(1;1;-2)$, $\vec{b}=(-3;0;-1)$ và điểm $A(0;2;1)$. Tọa độ điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{AM}=2\vec{a}-\vec{b}$ là:

A. $M(-5;1;2)$. **B.** $M(3;-2;1)$. **C.** $M(1;4;-2)$. **D.** $M(5;4;-2)$.

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hình chiếu của điểm $M\ 1;-3;-5\ $ trên mặt phẳng Oxy có tọa độ là:

A. $1;-3;5\ $. **B.** $1;-3;0\ $. **C.** $1;-3;1\ $. **D.** $1;-3;2\ $.

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M\ -3;2;-1\ $. Tọa độ điểm M' đối xứng với M qua mặt phẳng Oxy là:

A. $M'\ -3;2;1$. **B.** $M'\ 3;2;1$. **C.** $M'\ 3;2-1$. **D.** $M'\ 3;-2;-1$.

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M\ 2016;-1;-2017$. Hình chiếu vuông góc của điểm M trên trục Oz có tọa độ:

A. $0;0;0$ **B.** $2016;0;0$ **C.** $0;-1;0$ **D.** $0;0-2017$

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A\ -3;2;-1$. Tọa độ điểm A' đối xứng với A qua trục Oy là:

A. $A'\ -3;2;1$ **B.** $A'\ 3;2-1$ **C.** $A'\ 3;2;1$ **D.** $A'\ 3;-2;-1$

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A\ 1;2;3$. Khoảng cách từ A đến trục Oy bằng:

A. $10.$ **B.** $\sqrt{10}.$ **C.** $2.$ **D.** $3.$

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M\ 3;-1;2$. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **sai**?

A. Tọa độ hình chiếu của M trên mặt phẳng xOy là $M'\ 3;-1;0$.

B. Tọa độ hình chiếu của M trên trục Oz là $M'\ 0;0;2$.

C. Tọa độ đối xứng của M qua gốc tọa độ O là $M'\ -3;1;-2$.

D. Khoảng cách từ M đến gốc tọa độ O bằng $\sqrt[3]{14}.$

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M\ 1;-2;3$. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **sai**?

A. Tọa độ đối xứng của O qua điểm M là $O'\ 2;-4;6$.

B. Tọa độ điểm M' đối xứng với M qua trục Ox là $M'\ -1;-2;3$.

C. Khoảng cách từ M đến mặt phẳng tọa yOz bằng $1.$

D. Khoảng cách từ M đến trục Oy bằng $\sqrt{10}.$

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A\ -3;4;2$, $B\ -5;6;2$, $C\ -4;7;-1$. Tìm tọa độ điểm D thỏa mãn $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$.

A. $D\ -10;17;-7$ **B.** $D\ 10;17;-7$ **C.** $D\ 10;-17;7$ **D.** $D\ -10;-17;7$

Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho sáu điểm $A\ 1;2;3$, $B\ 2;-1;1$, $C\ 3;3;-3$, A', B', C' thỏa mãn $\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{C'C}=\vec{0}$. Nếu G' là trọng tâm tam giác $A'B'C'$ thì G' có tọa độ là:

A. $\left(2;\frac{4}{3};-\frac{1}{3}\right)$ **B.** $\left(2;-\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$ **C.** $\left(2;\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$ **D.** $\left(-2;\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $M\ 2;-3;5$, $N\ 4;7;-9$, $P\ 3;2;1$ và $Q\ 1;-8;12$. Bộ ba điểm nào sau đây là thẳng hàng?

A. $M,\ N,\ P$ **B.** $M,\ N,$ Q **C.** $M,\ P,\ Q$ **D.** $N,\ P,\ Q$

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A\ 2;-1;3$, $B\ -10;5;3$ và $M\ 2m-1;2;n+2$. Để $A,\ B,\ M$ thẳng hàng thì giá trị của $m,\ n$ là:

A. $m=1;n=\frac{3}{2}$ **B.** $m=-\frac{3}{2},\ n=1$ **C.** $m=-1,\ n=-\frac{3}{2}$ **D.** $m=\frac{2}{3},n=\frac{3}{2}$

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A\ 1;-3;5$ và $B\ 3;-2;4$. Điểm M trên trục Ox cách đều hai điểm $A,\ B$ có tọa độ là:

A. $M\left(\frac{3}{2};0;0\right)$. **B.** $M\left(-\frac{3}{2};0;0\right)$. **C.** $M\ 3;0;0$. **D.** $M\ -3;0;0$.

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A\ 1;1;1$, $B\ -1;1;0$, $C\ 3;1;-1$. Điểm M trên mặt phẳng Oxz cách đều ba điểm $A,\ B,\ C$ có tọa độ là:

A. $\left(0;\frac{5}{6};\frac{7}{6}\right)$. **B.** $\left(\frac{7}{6};0;-\frac{5}{6}\right)$. **C.** $\left(\frac{5}{6};0;-\frac{7}{6}\right)$. **D.** $\left(\frac{6}{5};0;-\frac{6}{7}\right)$.

Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC biết $1;0;-2$, $B\ 2;1;-1$, $C\ 1;-2;2$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

A. $G\ 4;-1;-1$ **B.** $G\left(\frac{4}{3};-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$ **C.** $G\left(2;\frac{-1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ **D.** $G\left(\frac{4}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(0;0;1)$, $B(-1;-2;0)$, $C(2;1;-1)$. Khi đó tọa độ chân đường cao H hạ từ A xuống BC là:

A. $H\left(\frac{5}{19};-\frac{14}{19};-\frac{8}{19}\right)$ **B.** $H\left(\frac{4}{9};1;1\right)$ **C.** $H\left(1;1;-\frac{8}{9}\right)$ **D.** $H\left(1;\frac{3}{2};1\right)$

Câu 33. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A\ 1;2;-1$, $B\ 2;-1;3$, $C\ -4;7;5$. Tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC là:

A. $\left(-\frac{2}{3};\frac{11}{3};1\right)$ **B.** $\left(\frac{2}{3};\frac{11}{3};\frac{1}{3}\right)$ **C.** $\left(\frac{11}{3};-2;1\right)$ **D.** $-2;11;1$

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A\ 2;-1;3$, $B\ 4;0;1$, $C\ -10;5;3$. Độ dài đường phân giác trong góc B của tam giác ABC bằng:

A. $2\sqrt{3}$ **B.** $2\sqrt{5}$ **C.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$ **D.** $\frac{2}{\sqrt{3}}$

Câu 35. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A\ 0;-4;0$, $B\ -5;6;0$, $C\ 3;2;0$. Tọa độ chân đường phân giác ngoài góc A của tam giác ABC là:

A. $15;-14;0$ **B.** $15;-4;0$ **C.** $-15;4;0$ **D.** $-15;-14;0$

Câu 36. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M\ 2;3;-1$, $N\ -1;1;1$, $P\ 1;m-1;2$. Với những giá trị nào của m thì tam giác MNP vuông tại N?

A. $m=3$ **B.** $m=2$ **C.** $m=1$ **D.** $m=0$

Câu 37. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có đỉnh $C\ -2;2;2$ và trọng tâm $G\ -1;1;2$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B của tam giác ABC, biết A thuộc mặt phẳng Oxy và điểm B thuộc trục cao.

A. $A\ -1;-1;0$, $B\ 0;0;4$ **B.** $A\ -1;1;0$, $B\ 0;0;4$

C. $A\ -1;0;1$, $B\ 0;0;4$ **D.** $A\ -4;4;0$, $B\ 0;0;1$

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A\ -4;-1;2$, $B\ 3;5;-10$. Trung điểm cạnh AC thuộc trục tung, trung điểm cạnh BC thuộc mặt phẳng Oxz. Tọa độ đỉnh C là:

A. $C\ 4;-5;-2$. **B.** $C\ 4;5;2$. **C.** $C\ 4;-5;2$. **D.** $C\ 4;5;-2$.

Câu 39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm A, B, C có tọa độ thỏa mãn $\overrightarrow{OA}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\overrightarrow{OB}=5\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$, $\overrightarrow{BC}=2\vec{i}+8\vec{j}+3\vec{k}$. Tọa độ điểm D để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành là:

A. $D\ 3;1;5$ **B.** $D\ 1;2;3$ **C.** $D\ -2;8;6$ **D.** $D\ 3;9;4$

Câu 40. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A\ 1;0;-2$, $B\ 2;1;-1$, $C\ 1;-2;2$ và $D\ 4;5-7$. Trọng tâm G của tứ diện $ABCD$ có tọa độ là:

A. $-2;1;2$ **B.** $8;2;-8$ **C.** $8;-1;2$ **D.** $2;1;-2$

Câu 41. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $A\ 2;4;0$, $B\ 4;0;0$, $C\ -1;4;-7$ và $D'\ 6;8;10$. Tọa độ điểm B' là:

A. $10;8;6$ **B.** $6;12;0$ **C.** $13;0;17$ **D.** $8;4;10$

Câu 42. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $S: x+1^2+y-2^2+z-1^2=9$. Tính tọa độ tâm I và bán kính R của S.

A. $I\ -1;2;1$ và $R=3$. **B.** $I\ 1;-2;-1$ và $R=3$.

C. $I\ -1;2;1$ và $R=9$. **D.** $I\ 1;-2;-1$ và $R=9$.

Câu 43. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu S có phương trình

$x^2+y^2+z^2+2x-4y+6z-2=0$. Tính tọa độ tâm I và bán kính R của S.

A. Tâm $I\ -1;2;-3$ và bán kính $R=4$.

B. Tâm $I\ 1;-2;3$ và bán kính $R=4$.

C. Tâm $I\ -1;2;3$ và bán kính $R=4$.

D. Tâm $I\ 1;-2;3$ và bán kính $R=16$.

Câu 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu nào sau đây có tâm nằm trên trục Oz?

A. $S_1\ :\ x^2+y^2+z^2+2x-4y-2=0$.

B. $S_2\ :\ x^2+y^2+z^2+6z-2=0$.

C. $S_3\ :\ x^2+y^2+z^2+2x+6z=0$.

D. $S_4\ :\ x^2+y^2+z^2+2x-4y+6z-2=0$.

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu nào sau đây có tâm nằm trên mặt phẳng tọa độ Oxy?

A. $S_1\ :\ x^2+y^2+z^2+2x-4y-2=0$

B. $S_2\ :\ x^2+y^2+z^2-4y+6z-2=0$

C. $S_3\ :\ x^2+y^2+z^2+2x-6z-2=0$

D. $S_4\ :\ x^2+y^2+z^2+2x-4y+6z-2=0$

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu tâm $I\ 6,3,-4$ tiếp xúc với Ox có bán kính R bằng:

A. $R=6$ **B.** $R=5$ **C.** $R=4$ **D.** $R=3$

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu S có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+5=0$. Trong các số dưới đây, số nào là diện tích của mặt cầu S?

A. 12π **B.** 9π **C.** 36π **D. 36**

Câu 48: Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình của mặt cầu:

A. $x^2+y^2+z^2-10xy-8y+2z-1=0$

B. $3x^2+3y^2+3z^2-2x-6y+4z-1=0$

C. $2x^2+2y^2+2z^2-2x-6y+4z+9=0$

D. $x^2+(y-z)^2-2x-4(y-z)-9=0$

Câu 49. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, giả sử tồn tại mặt cầu S có phương trình $x^2+y^2+z^2-4x+8y-2az+6a=0$. Nếu S có đường kính bằng 12 thì a nhận những giá trị nào?

A. $\begin{bmatrix}a=-2\\a=8\end{bmatrix}$ **B.** $\begin{bmatrix}a=2\\a=-8\end{bmatrix}$ **C.** $\begin{bmatrix}a=-2\\a=4\end{bmatrix}$ **D.** $\begin{bmatrix}a=2\\a=-4\end{bmatrix}$

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu S có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=0$. Mặt phẳng Oxy cắt S theo giao tuyến là một đường tròn. Đường tròn giao tuyến này có bán kính r bằng:

A. $r=\sqrt{5}$ **B.** $r=2$ **C.** $r=\sqrt{6}$ **D.** $r=4$

Câu 51. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu S có tâm $I\ 1;-2;0$, bán kính $R=5$. Phương trình của mặt cầu S là:

A. $S:\ x+1^{\ 2}+\ y-2^{\ 2}+z^2=25.$

B. $S:\ x+1^{\ 2}+\ y-2^{\ 2}+z^2=5.$

C. $S:\ x-1^{\ 2}+\ y+2^{\ 2}+z^2=25.$

D. $S:\ x-1^{\ 2}+\ y+2^{\ 2}+z^2=5.$

Câu 51. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu S có tâm $I\ -1;4;2$ và có thể tích $V=972\pi$. Khi đó phương trình của mặt cầu S là:

A. $x+1^{\ 2}+\ y-4^{\ 2}+\ z-2^{\ 2}=81$

B. $x+1^{\ 2}+\ y-4^{\ 2}+\ z-2^{\ 2}=9$

C. $x-1^{\ 2}+\ y+4^{\ 2}+\ z-2^{\ 2}=9$

D. $x-1^{\ 2}+\ y+4^{\ 2}+\ z+2^{\ 2}=81$

Câu 52. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu S có tâm $I\ 2;1;-1$, tiếp xúc với mặt phẳng tọa độ Oyz. Phương trình của mặt cầu S là:

A. $x+2^{\ 2}+\ y+1^{\ 2}+\ z-1^{\ 2}=4$

B. $x-2^{\ 2}+\ y-1^{\ 2}+\ z+1^{\ 2}=1$

C. $x-2^{\ 2}+\ y-1^{\ 2}+\ z+1^{\ 2}=4$

D. $x+2^{\ 2}+\ y-1^{\ 2}+\ z+1^{\ 2}=2$

Câu 53. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu S đi qua $A\ 0,2,0$, $B\ 2;3;1$, $C\ 0,3;1$ và có tâm ở trên mặt phẳng Oxz. Phương trình của mặt cầu S là:

A. $x^2+\ y-6^{\ 2}+\ z-4^{\ 2}=9$ **B.** $x^2+\ y-3^{\ 2}+z^2=16$

C. $x^2+\ y-7^{\ 2}+\ z-5^{\ 2}=26$ **D.** $x-1^{\ 2}+y^2+\ z-3^{\ 2}=14$

2. MẶT PHẲNG

A. CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN:

I. Phương trình mặt phẳng:

Định nghĩa :

Trong không gian Oxyz phương trình dạng Ax + By + Cz + D = 0

với $A^2+B^2+C^2>0$ được gọi là phương trình tổng quát của mặt phẳng

◇ Phương trình mặt phẳng (P) : Ax + By + Cz + D = 0 với $A^2+B^2+C^2>0$. Có véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(A;B;C)$

◇ Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và nhận vectơ $\vec{n}=(A;B;C)$, $\vec{n}\neq\vec{0}$ làm vectơ pháp tuyến có dạng (P) : $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

◇ Nếu (P) có cặp vectơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ không cùng phương ,có giá song song hoặc nằm trên (P) .Thì vectớ pháp tuyến của (P) được xác định $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$

II . <u>Các trường hợp riêng của mặt phẳng</u> :

Trong không gian Oxyz cho mp(α) : Ax + By + Cz + D = 0 , với $A^2+B^2+C^2>0$ Khi đó:

◇ D = 0 Khi và chỉ khi (α) đi qua gốc tọa độ.

◇ A=0 ,$B\neq 0$,$C\neq 0$, $D\neq 0$ Khi và chỉ khi (α) song song với trục Ox

◇ A=0 ,B = 0 ,$C\neq 0$, $D\neq 0$ Khi và chỉ khi (α) song song mp (Oxy)

◇ A,B,C,D$\neq 0$. Đặt $a=-\frac{D}{A}$, $b=-\frac{D}{B}$, $c=-\frac{D}{C}$ Khi đó $(\alpha):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

(Các trường hợp khác nhận xét tương tự)

II. <u>Vị trí tương đối của hai mặt phẳng</u>

Trong không gian Oxyz cho (α): Ax+By+Cz+D=0 và (α '):A'x+B'y+C'z+D'=0

◇ (α)cắt (α ') $\Leftrightarrow$ A : B : C $\neq$ A': B': C'

◇ (α) // (α ') $\Leftrightarrow$ A : A' = B : B' = C : C' $\neq$ D : D'

◇ (α) $\equiv$ (α ') $\Leftrightarrow$ A : B : C : D = A': B': C': D'

<u>Đặc biệt</u>

(α) $\perp$ (α ') $\Leftrightarrow \vec{n_1}.\vec{n_2}=0 \Leftrightarrow A.A'+B.B'+C.C'=0$

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

VD1. Tìm một VTPT của mặt phẳng:

a) Mặt phẳng (Oxy).

b) Mặt phẳng (Oyz).

c) Qua A(2; –1; 3), B(4; 0; 1), C(–10; 5; 3).

Hướng dẫn

a) $\vec{n}_{(Oxy)}=\vec{k}=(0;0;1)$,

b) $\vec{n}_{(Oyz)} = \vec{i} = (1;0;0)$

c) $\overrightarrow{AB} = (2;1;-2)$, $\overrightarrow{AC} = (-12;6;0)$, $\overrightarrow{BC} = (-14;5;2)$

Vec tơ pháp tuyến của mp(ABC) là : $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right] = (12;24;24)$

VD2. Viết ptmp (P)

a) Đi qua M(1; –2; 4) và nhận $\vec{n} = (2;3;5)$ làm VTPT.

b) Đi qua A(0; –1; 2) và song song với giá của mỗi vectơ $\vec{u} = (3;2;1)$, $\vec{v} = (-3;0;1)$.

c) Đi qua A(–3; 0; 0), B(0; –2; 0), C(0; 0; –1).

Hướng dẫn

Viết ptmp (P)

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

a) (P): $2x + 3y + 5z - 16 = 0$

b) $\vec{n} = [\vec{u}, \vec{v}] = (2;-6;6)$

(P): $x - 3y + 3z - 9 = 0$

c) (P): $\frac{x}{-3} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{-1} = 1$

VD3.

Tính khoảng cách từ A(2; 4; –3) đế các mp sau:

a) (P): $2x - y + 2z - 9 = 0$

b) (P): $x = 0$

Hướng dẫn

a) $d(A,(P)) = 5$

b) $d(A,(P)) = 2$

VD4. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, viết phương trình mặt phẳng (P) qua O, vuông góc với mặt phẳng (Q): $x + y + z = 0$ và cách điểm M(1; 2; –1) một khoảng bằng $\sqrt{2}$.

Hướng dẫn

• *PT mặt phẳng (P) qua O nên có dạng:* $Ax+By+Cz=0$ *(với* $A^2+B^2+C^2\neq 0$*).*

• *Vì (P)* $\perp$ *(Q) nên:* $1.A+1.B+1.C=0 \Leftrightarrow C=-A-B$ *(1)*

• $d(M,(P))=\sqrt{2} \Leftrightarrow \dfrac{|A+2B-C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\sqrt{2} \Leftrightarrow (A+2B-C)^2=2(A^2+B^2+C^2)$ *(2)*

Từ (1) và (2) ta được: $8AB+5B^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} B=0 & (3) \\ 8A+5B=0 & (4)\end{array}\right.$

• *Từ (3):* $B=0 \Rightarrow C=-A$*. Chọn* $A=1, C=-1 \Rightarrow$ *(P):* $x-z=0$

• *Từ (4):* $8A+5B=0$*. Chọn* $A=5, B=-8 \Rightarrow C=3 \Rightarrow$ *(P):* $5x-8y+3z=0$

VD5. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz,* cho mặt cầu (*S*) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11=0$ và mặt phẳng (α) có phương trình $2x + 2y – z + 17 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (β) song song với (α) và cắt (*S*) theo giao tuyến là đường tròn có chu vi bằng $p=6\pi$.

Hướng dẫn

• *Do* (β) *//* (α) *nên* (β) *có phương trình* $2x + 2y – z + D = 0 \quad (D\neq 17)$

(S) có tâm I(1; –2; 3), bán kính R = 5. Đường tròn có chu vi 6π *nên có bán kính r = 3.*

Khoảng cách từ I tới (β) ***là h =*** $\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

Do đó $\dfrac{|2.1+2(-2)-3+D|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=4 \Leftrightarrow |-5+D|=12 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D=-7 \\ D=17 \text{ (loại)}\end{array}\right.$

Vậy (β) *có phương trình* $2x+2y-z-7=0$.

VD6 . Trong không gian với hệ toạ độ O*xyz,* cho các điểm $M(-1;1;0), N(0;0;-2), I(1;1;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A và B, đồng thời khoảng cách từ I đến (P) bằng $\sqrt{3}$.

Hướng dẫn

PT mặt phẳng (P) có dạng: $ax+by+cz+d=0$ $(a^2+b^2+c^2\neq 0)$.

Ta có: $\left\{\begin{array}{l} M\in(P) \\ N\in(P) \\ d(I,(P))=\sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} a=-b, 2c=a-b, d=a-b & (1) \\ 5a=7b, 2c=a-b, d=a-b & (2)\end{array}\right.$.

+ Với (1) $\Rightarrow$ *PT mặt phẳng (P):* $x-y+z+2=0$

+ *Với (2)* $\Rightarrow$ *PT mặt phẳng (P):* $7x+5y+z+2=0$

VD7 Trong không gian toạ độ O*xyz*, cho hai điểm $M(0;-1;2)$ và $N(-1;1;3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua M, N sao cho khoảng cách từ điểm $K(0;0;2)$ đến mặt phẳng (P) là lớn nhất

Hướng dẫn

• ***PT (P) có dạng:*** $Ax+B(y+1)+C(z-2)=0 \Leftrightarrow Ax+By+Cz+B-2C=0$

$(A^2+B^2+C^2\neq 0)$

$N(-1;1;3)\in(P) \Leftrightarrow -A+B+3C+B-2C=0 \Leftrightarrow A=2B+C$

$\Rightarrow (P):(2B+C)x+By+Cz+B-2C=0;\quad d(K,(P))=\dfrac{|B|}{\sqrt{4B^2+2C^2+4BC}}$

• *Nếu B = 0 thì d(K, (P)) = 0 (loại)*

• *Nếu* $B\neq 0$ *thì* $d(K,(P))=\dfrac{|B|}{\sqrt{4B^2+2C^2+4BC}}=\dfrac{1}{\sqrt{2\left(\dfrac{C}{B}+1\right)^2+2}}\leq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Dấu "=" xảy ra khi B = –C. Chọn C = 1. Khi đó PT (P): $x+y-z+3=0$.

C. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1: Cho bốn điểm A(3;-2;-2), B(3;2;0), C(0;2;1), và D(-1;1;2)

a) Viết phương trình mặt phẳng (ABC).
b) Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AC.
c) Viết phương trình mặt phẳng (P)chứa AB và song song với CD.
d) Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa CD và vuông góc với mp(ABC).

Bài 2: Cho hai mặt phẳng (P): 2x – y + 2z - 4=0 , (Q): x - 2y - 2z + 4=0

a) Chứng tỏ rằng hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc nhau.
b) Viết phương trình tham số đường thẳng (Δ) là giao tuyến của hai mặtphẳng đó.
c) Chứng minh rằng đường thẳng (Δ) cắt trục Oz .Tìm tọa độ giao điểm.
d) Mặt phẳng (P) cắt ba trục tọa độ tai ba điểm A,B,C. Tính diện tích tam giác ABC.
e) Chứng tỏ rằng điểm O gốc tọa độ không thuộc mặt phẳng (P) từ đó tính thể tích tứ diện OABC.

Bài 3: Trong không gian tọa độ Oxyz cho một mặt phẳng (P): 2x + y – z - 6=0

a) Viết phương trình mp (Q) đi qua gốc tọa độ O và song song với mp (P).
b) Viết phương trình tham số ,chính tắc đường thẳng đi qua gốc tọa độ O và vuông góc với mặt mp(P).
c) Tính khoảng cách từ gốc tọa độ đến mặt phẳng (P).

Bài 4: Cho mặt phẳng (P): x + y – z + 5=0 và (Q): 2x – z = 0 .

a) Chứng tỏ hai mặt phẳng cắt nhau
b) Lập phương trình mặt phẳng (α) qua giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) đi qua A(-1;2;3).
c) Lập phương trình mặt phẳng (β) qua giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) và song song với Oy.

d) Lập phương trình mặt phẳng (χ) đi qua gốc tọa độ O và vuông góc với hai mặt phẳng (P)và (Q).

Bài 5: Trong không gian Oxyz. Cho M(2;1;-1) và mặt phẳng (P) : 2x + 2y - z + 2 =0

a) Tính độ dài đoạn vuông góc kẽ từ M đến mặt phẳng (P).
b) Viết phương trình đường thẳng (d) qua M vuông góc với mặt phẳng (P).
c) Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm M song song Ox và hợp với mặt phẳng (P) một góc 45^0.

Bài 6: Trong không gian với hệ tọa Oxyz cho hai mặt phẳng

(P): 2x + ky + 3z - 5=0 và (Q): mx - 6y - 6z + 2=0 .

a) Xác định giá trị k và m để hai mặt phẳng (P) và (Q) song song nhau,lúc đó hãy tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng.
b) Trong trường hợp k = m = 0 gọi (d) là giao tuyến của (P) và (Q) hãy tính khoảng cách từ A(1;1;1) đến đường thẳng (d).

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $P: 3x-z+2=0$. Vecto nào dưới đây là một vecto pháp tuyến của P ?

A. $\vec{n}=(-1;0;-1)$. **B.** $\vec{n}=(3;-1;2)$. **C.** $\vec{n}=(3;-1;0)$. **D.** $\vec{n}=(3;0;-1)$.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $Q: 2x-y+5z-15=0$ và điểm $E(1;2;-3)$. Mặt phẳng P qua E và song song với Q có phương trình là:

A. $P: x+2y-3z+15=0$ **B.** ..

C. $P: 2x-y+5z+15=0$ **D.** $P: 2x-y+5z-15=0$

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;1;1)$ và $B(1;2;3)$. Viết phương trình mặt phẳng P đi qua A và vuông góc với đường thẳng AB.

A. $P: x+y+2z-3=0$. **B.** $P: x+y+2z-6=0$.

C. $P: x+3y+4z-7=0$. **D.** $P: x+3y+4z-26=0$.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng P qua điểm $G(1;1;1)$ và vuông góc với đường thẳng OG có phương trình là:

A. $P: x+y+z-3=0$ **B.** $P: x+y+z=0$

C. $P: x-y+z=0$ **D.** $P: x+y-z-3=0$

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;1;-1)$, $B(-1;0;4)$, $C(0;-2;-1)$. Phương trình nào sau đây là phương trình của mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC ?

A. $x-2y-5z+5=0$ **B.** $x-2y-5z=0$

C. $x-2y-5z-5=0$ **D.** $2x-y+5z-5=0$

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A\ 4;1;-2$ và $B\ 5;9;3$. Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB là:

A. $2x+6y-5z+40=0$ **B.** $x+8y-5z-41=0$

C. $x-8y-5z-35=0$ **D.** $x+8y+5z-47=0$

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng α đi qua điểm $M\ 0;0;-1$ và song song với giá của hai vectơ $\vec{a}=\ 1;-2;3$, $\vec{b}=\ 3;0;5$. Phương trình của mặt phẳng α là:

A. $\alpha:-5x+2y+3z+3=0$ **B.** $\alpha:5x-2y-3z-21=0$

C. $\alpha:10x-4y-6z+21=0$ **D.** $\alpha:5x-2y-3z+21=0$

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ mặt phẳng α đi qua $A\ 2;-1;1$ và vuông góc với hai mặt phẳng $P:2x-z+1=0$ và $Q:y=0$. Phương trình của mặt phẳng α là:

A. $\alpha:2x+y-4=0$ **B.** $\alpha:x+2z-4=0$

C. $\alpha:x+2y+z=0$ **D.** $\alpha:2x-y+z=0$

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $P\ 2;0;-1$, $Q\ 1;-1;3$ và mặt phẳng $P:3x+2y-z+5=0$. Gọi α là mặt phẳng đi qua P,Q và vuông góc với P , phương trình của mặt phẳng α là:

A. $\alpha:-7x+11y+z-3=0$ **B.** $\alpha:7x-11y+z-1=0$

C. $\alpha:-7x+11y+z+15=0$ **D.** $\alpha:7x-11y-z+1=0$

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng α cắt ba trục tọa độ tại ba điểm $M\ 8;0;0$, $N\ 0;-2;0$ và $P\ 0;0;4$. Phương trình của mặt phẳng α là:

A. $\alpha:\frac{x}{8}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{4}=0$ **B.** $\alpha:\frac{x}{4}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{2}=1$

C. $\alpha:x-4y+2z=0$ **D.** $\alpha:x-4y+2z-8=0$

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A\ 4;-3;2$. Hình chiếu vuông góc của A lên các trục tọa độ Ox,Oy,Oz theo thứ tự lần lượt là M,N,P . Phương trình mặt phẳng MNP là:

A. $4x-3y+2z-5=0$ **B.** $3x-4y+6z-12=0$

C. $2x-3y+4z-1=0$ **D.** $\frac{x}{4}-\frac{y}{3}+\frac{z}{2}+1=0$

Câu 12. (ĐỀ MINH HỌA QUỐC GIA NĂM 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $P: 3x+4y+2z+4=0$ và điểm $A\ 1;-2;3$. Tính khoảng cách d từ A đến P.

A. $d=\frac{5}{9}$. **B.** $d=\frac{5}{29}$. **C.** $d=\frac{5}{\sqrt{29}}$. **D.** $d=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm $A\ 2;-1;-1$ trên mặt phẳng $\alpha: 16x-12y-15z-4=0$. Tính độ dài đoạn thẳng AH.

A. 55. **B.** $\frac{11}{5}$. **C.** $\frac{11}{25}$. **D.** $\frac{22}{5}$.

Câu 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A\ 1;1;3$, $B\ -1;3;2$, $C\ -1;2;3$. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C.

A. $\sqrt{3}$. **B.** 3. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $P: 3x-2y+6z+14=0$ và mặt cầu $S: x^2+y^2+z^2-2\ x+y+z\ -22=0$. Khoảng cách từ tâm I của mặt cầu S tới mặt phẳng P là:

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu S có tâm $I\ 2;1;-1$ và tiếp xúc với mặt phẳng $\alpha: 2x-2y-z+3=0$. Bán kính của S bằng:

A. 2 **B.** $\frac{2}{3}$ **C.** $\frac{4}{3}$ **D.** $\frac{2}{9}$

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A\ 3,-2,-2$, $B\ 3,2,0$, $C\ 0,2,1$ và $D\ -1,1,2$. Mặt cầu tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng BCD có bán kính bằng:

A. 9 **B.** 5 **C.** $\sqrt{14}$ **D.** $\sqrt{13}$

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $P: 3x+y-3z+6=0$ và mặt cầu $S: x-4^{\ 2}+y+5^{\ 2}+z+2^{\ 2}=25$. Mặt phẳng P cắt mặt cầu S theo giao tuyến là một đường tròn. Đường tròn giao tuyến này có bán kính r bằng:

A. $r=6$ **B.** $r=5$ **C.** $r=\sqrt{6}$ **D.** $r=\sqrt{5}$

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $S: x^2+y^2+z^2-6x+4y-12=0$. Mặt phẳng nào sau đây cắt S theo một đường tròn có bán kính $r=3$?

A. $x+y+z+\sqrt{3}=0$ **B.** $2x+2y-z+12=0$

C. $4x-3y-z-4\sqrt{26}=0$ **D.** $3x-4y+5z-17+20\sqrt{2}=0$

Câu 20. (ĐỀ MINH HỌA QUỐC GIA NĂM 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu S có tâm $I\ 2;1;1$ và mặt phẳng $P: 2x+y+2z+2=0$. Biết mặt phẳng P cắt mặt cầu S theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 1. Viết phương trình mặt cầu S.

A. $S: x+2^2+y+1^2+z+1^2=8$. **B.** $S: x+2^2+y+1^2+z+1^2=10$.

C. $S: x-2^2+y-1^2+z-1^2=8$. **D.** $S: x-2^2+y-1^2+z-1^2=10$.

Câu 21 Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $S: x^2+y^2+z^2-2y-2z-1=0$ và mặt phẳng $P: 2x+2y-2z+15=0$. Khoảng cách ngắn nhất giữa điểm M trên S và điểm N trên P là:

A. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\frac{3\sqrt{2}}{3}$ **C.** $\frac{3}{2}$ **D.** $\frac{2}{3}$

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A\ -3;2;2$, $B\ 2;2;-2$ và vecto $\vec{v}=\ 2;-1;3$. Gọi P là mặt phẳng chứa AB và song song với vecto $\vec{v}$. Xác định m, n để mặt phẳng $Q: 4x+my+5z+1-n=0$ trùng với P.

A. $m=23,\ n=45$. **B.** $m=-23,\ n=45$.

C. $m=45,\ n=23$. **D.** $m=45,\ n=-23$.

Câu 23 Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $P: 2x-y-z-3=0$ và $Q: x-z-2=0$. Tính góc giữa hai mặt phẳng P và Q. z

A. 30^0 **B.** 45^0 **C.** 60^0 **D.** 90^0

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $P: 2x-y-2z-9=0$ và $Q: x-y-6=0$. Số đo góc tạo bởi hai mặt phẳng bằng:

A. 30^0 **B.** 45^0 **C.** 60^0 **D.** 90^0

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tìm trên trục Oy điểm M cách mặt phẳng $\alpha: x+2y-2z-2=0$ một khoảng bằng 4.

A. $M\ 0;6;0$ hoặc $M\ 0;-6;0$. **B.** $M\ 0;7;0$ hoặc $M\ 0;-5;0$.

C. $M\ 0;4;0$ hoặc $M\ 0;-4;0$. **D.** $M\ 0;3;0$ hoặc $M\ 0;-3;0$.

Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $P: x+y-z+1=0$ và $Q: x-y+z-5=0$. Điểm M nằm trên trục Oy cách đều P và Q là:

A. $M\ 0;2;0$. **B.** $M\ 0;3;0$. **C.** $M\ 0;-3;0$. **D.** $M\ 0;-2;0$.

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tìm trên trục Oz điểm M cách đều điểm $A\ 2;3;4$ và mặt phẳng $\alpha : 2x+3y+z-17=0.$

A. $M\ 0;0;0$. **B.** $M\ 0;0;1$. **C.** $M\ 0;0;3$. **D.** $M\ 0;0;2$.

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm E thuộc mặt phẳng Oxy, có hoành độ bằng 1, tung độ nguyên và cách đều hai mặt phẳng $\alpha : x+2y+z-1=0$ và $\beta : 2x-y-z+2=0$. Tọa độ của E là:

A. $E\ 1;4;0$. **B.** $E\ 1;-4;0$. **C.** $E\ 1;0;4$. **D.** $E\ 1;0;-4$.

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu

$S : x-1^2+y-2^2+z-3^2=36$, điểm $I\ 1;2;0$ và đường thẳng $d : \frac{x-2}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z}{-1}$.

Tìm tọa độ điểm M thuộc d, N thuộc S sao cho I là trung điểm MN.

A. $\begin{bmatrix} N\ 3;2;1 \\ N\ 3;6;-1 \end{bmatrix}$. **B.** $\begin{bmatrix} N\ -3;-2;1 \\ N\ 3;6;-1 \end{bmatrix}$. **C.** $\begin{bmatrix} N\ -3;2;1 \\ N\ 3;6;1 \end{bmatrix}$. **D.** $\begin{bmatrix} N\ -3;-2;1 \\ N\ 3;6;1 \end{bmatrix}$.

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A\ 2;4;4$, $B'\ 2;-5;-5$ và mặt phẳng $P : x+y+z-4=0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc P sao cho $MA+MB$ có giá trị nhỏ nhất.

A. $M\ 2;1;1$. **B**. $M\ 2;-1;1$. **C**. $M\ 1;2;1$. **D**. $M\ -1;1;2$.

Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $P : 3x-3y-2z-15=0$ và ba điểm $A\ 1;4;5$, $B\ 0;3;1$, $C\ 2;-1;0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc P sao cho $MA^2+MB^2+MC^2$ có giá trị nhỏ nhất.

A. $M\ -4;-1;0$. **B**. $M\ 4;-1;0$. **C**. $M\ 4;1;0$. **D**. $M\ 1;-4;0$.

Câu32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A\ -3;5;-5$, $B\ 5;-3;7$ và mặt phẳng $P : x+y+z=0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc P sao cho MA^2-2MB^2 có giá trị lớn nhất.

A. $M\ -6;-18;12$. **B**. $M\ 6;18;12$.

C. $M\ 6;-18;12$. **D**. $M\ -6;18;+12$.

Câu 33. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $P : x+y-z+1=0$ và $Q : x-y+z-5=0$. Điểm M nằm trên trục Oy cách đều P và Q là:

A. $M\ 0;2;0$. **B.** $M\ 0;3;0$. **C.** $M\ 0;-3;0$. **D.** $M\ 0;-2;0$.

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A\ 2;1;-1$, $B\ 0;3;1$ và mặt phẳng

$P: x+y-z+3=0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho $\left|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|$ có giá trị nhỏ nhất.

A. $M\ -4;-1;0$. **B**. $M\ -1;-4;0$. **C**. $M\ 4;1;0$. **D**. $M\ 1;-4;0$.