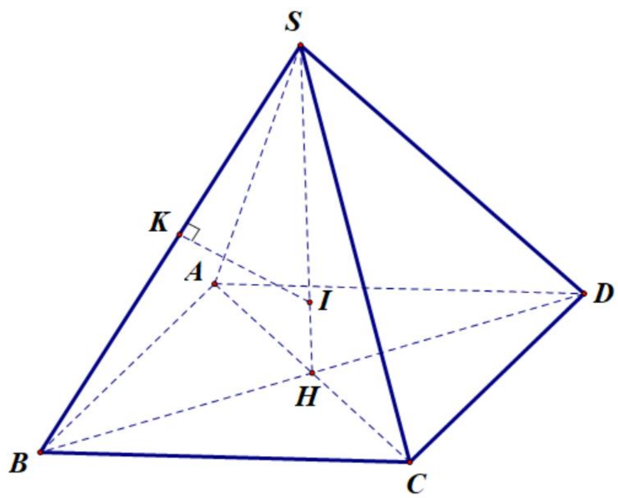
ĐÁP ÁN CHI TIẾT TỪ CÂU 46 ĐẾN CÂU 50

Câu 46. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, các cạnh bên của hình chóp bằng $\sqrt{6}\ cm$, $AB = 4\ cm$. Khi thể tích khối chóp $S.ABCD$ đạt giá trị lớn nhất, tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp $S.ABCD$.

A. $12\pi\ cm^2$. **B.** $4\pi\ cm^2$. **C.** $9\pi\ cm^2$. **D.** $36\pi\ cm^2$.

Lời giải

Chọn D



Dựng $SH \perp (ABCD)$, do $SA = SB = SC = SD$ nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp của đáy $\Rightarrow (ABCD)$ là hình chữ nhật $\Rightarrow H = AC \cap BD$.

Đặt $BC = x > 0$, suy ra $AC = \sqrt{x^2+16}; SH = \frac{\sqrt{8-x^2}}{2}$. Khi đó:

$$V = \frac{2x\sqrt{8-x^2}}{3} = \frac{2}{3}x\sqrt{8-x^2} \le \frac{2}{3}\frac{(x^2+8-x^2)}{2} = \frac{8}{3}$$

Dấu $" = "$ xảy ra khi x=2 cm.Bán kính mặt cầu ngoại tiếp $R = IS = \frac{SB^2}{2SH} = 3\ (cm)$

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$ là $S = 4\pi R^2 = 36\pi\ (Cm^2)$.

Câu 47. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn

$$\log_3\left(x^2+y^2+2x\right)+\log_2\left(x^2+y^2\right) \le \log_3(2x)+\log_2\left(x^2+y^2+48x\right)?$$

A. 189. **B.** 196. **C.** 190. **D.** 168.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x>0$.

Ta có: $\log_3\left(x^2+y^2+2x\right)+\log_2\left(x^2+y^2\right)\le\log_3(2x)+\log_2\left(x^2+y^2+48x\right)$

$\Leftrightarrow \log_3\left(x^2+y^2+2x\right)-\log_3(2x)\le\log_2\left(x^2+y^2+48x\right)-\log_2\left(x^2+y^2\right)$

$\Leftrightarrow \log_3\left(\dfrac{x^2+y^2+2x}{2x}\right)\le\log_2\left(\dfrac{x^2+y^2+48x}{x^2+y^2}\right)\Leftrightarrow\log_3\left(1+\dfrac{x^2+y^2}{2x}\right)\le\log_2\left(1+\dfrac{48x}{x^2+y^2}\right)$

$\Leftrightarrow \log_3\left(\dfrac{x^2+y^2}{2x}+1\right)-\log_2\left(1+\dfrac{48x}{x^2+y^2}\right)\le 0.$

Đặt: $t=\dfrac{x^2+y^2}{2x}(t>0)$, bất phương trình trở thành: $\log_3(1+t)-\log_2\left(1+\dfrac{24}{t}\right)\le 0$ (1).

Xét hàm số $f(t)=\log_3(1+t)-\log_2\left(1+\dfrac{24}{t}\right)$ có $f'(t)=\dfrac{1}{(1+t)\ln 3}+\dfrac{24}{\left(t^2+24t\right)\ln 2}>0,\forall t>0$.

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Ta có $f(8)=\log_3(1+8)-\log_2\left(1+\dfrac{24}{8}\right)=0$

Từ đó suy ra: (1) $\Leftrightarrow f(t)\le f(8)\Leftrightarrow t\le 8\Leftrightarrow\dfrac{x^2+y^2}{2x}\le 8\Leftrightarrow(x-8)^2+y^2\le 64$.

Đếm các cặp giá trị nguyên của $(x;y)$

Ta có: $(x-8)^2\le 64\Leftrightarrow 0\le x\le 16$, mà $x>0$ nên $0<x\le 16$.

Với $x=1,x=15\Rightarrow y=\{\pm3;\pm2;\pm1;0\}$ nên có 14 cặp.

Với $x=2,x=14\Rightarrow y=\{\pm5;\pm4;\pm3;\pm2;\pm1;0\}$ nên có 22 cặp.

Với $x=3,x=13\Rightarrow y=\{\pm6;\pm5;\pm4;\pm3;\pm2;\pm1;0\}$ nên có 26 cặp.

Với $x=4;x=12\Rightarrow y=\{\pm6;\pm5;\pm4;\pm3;\pm2;\pm1;0\}$ nên có 26 cặp.

Với $x=5,x=11\Rightarrow y=\{\pm7;\pm6;\pm5;\pm4;\pm3;\pm2;\pm1;0\}$ nên có 30 cặp.

Với $x=6;x=10\Rightarrow y=\{\pm7;\pm6;\pm5;\pm4;\pm3;\pm2;\pm1;0\}$ nên có 30 cặp.

Với $x=7,x=9\Rightarrow y=\{\pm7;\pm6;\pm5;\pm4;\pm3;\pm2;\pm1;0\}$ nên có 30 cặp.

Với $x=8\Rightarrow y=\{\pm8;\pm7;\pm6;\pm5;\pm4;\pm3;\pm2;\pm1;0\}$ có 17 cặp.

Với $x=16\Rightarrow y=0$ có 1 cặp.

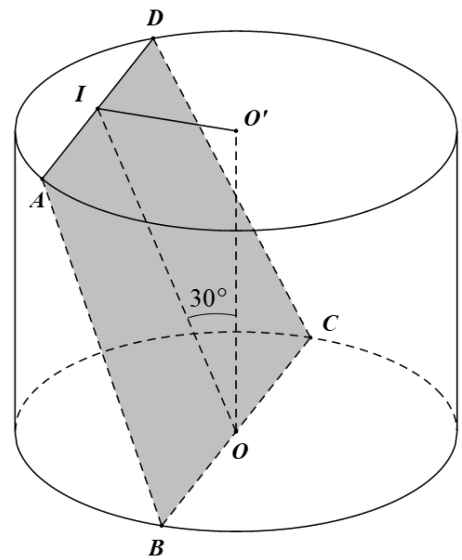
Vậy có 196 cặp giá trị nguyên $(x; y)$ thỏa mãn đề bài.

Câu 48. Cho hình trụ có 2 đáy là hình tròn tâm O và O', thể tích $V = \pi a^3\sqrt{3}$. Mặt phẳng (P) đi qua tâm O và tạo với OO' một góc $30°$, cắt hai đường tròn tâm O và O' tại bốn điểm là bốn đỉnh của một hình thang có đáy lớn gấp đôi đáy nhỏ và diện tích bằng $3a^2$. Khoảng cách từ tâm O' đến (P) là:

A. $\frac{\sqrt{3}a}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a}{12}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a}{4}$.

Lời giải

Chọn C



Giả sử thiết diện là hình thang $ABCD$ có đáy nhỏ AD và đáy lớn BC, bán kính đáy là r.

Ta có: $AD = \frac{BC}{2} = \frac{2r}{2} = r$.

Kẻ $O'I \perp AD$ tại $I \Rightarrow AD \perp (OO'I) \Rightarrow (ABCD) \perp (OO'I) \Rightarrow \left(OO', (ABCD)\right) = O'OI = 30°$

$\Delta OO'I$ vuông tại O' nên $\cos O'IO = \frac{OO'}{OI} \Rightarrow OI = \frac{OO'}{\cos O'IO} = OO' : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2.OO'}{\sqrt{3}}$

Diện tích $ABCD$ là $3a^2$ nên ta có:

$S_{ABCD} = \frac{(AD+BC).OI}{2} = 3a^2 \Leftrightarrow \frac{(r+2r)}{2}.\frac{2.OO'}{\sqrt{3}} = 3a^2 \Rightarrow r = \frac{a^2\sqrt{3}}{O'O}$.

Thể tích khối trụ là: $V_{(T)} = \pi r^2.O'O = \pi.\frac{3a^4}{O'O^2}.O'O = \pi a^3\sqrt{3} \Rightarrow O'O = a\sqrt{3}$.

Vậy, khoảng cách từ tâm O' đến (P) là $d\left(O';(P)\right)=O'O.\sin 30^0=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Câu 49. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;-2;0)$ và $B(3;4;5)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa giao tuyến của hai mặt cầu $(S_1):(x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=4$ và $(S_2):x^2+y^2+z^2-2x-6z+7=0$. Xét hai điểm M, N là hai điểm bất kì thuộc (P) sao cho $MN=1$. Giá trị nhỏ nhất của $AM+BN$ bằng

A. $72-2\sqrt{34}$. **B.** $\sqrt{72-2\sqrt{34}}$. **C.** $72+2\sqrt{34}$. **D.** $\sqrt{72+2\sqrt{34}}$.

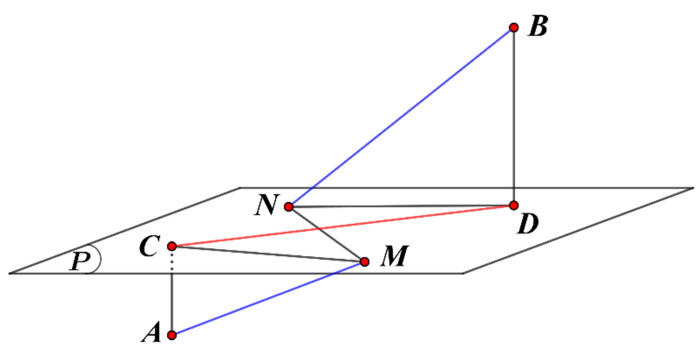
Lời giải

Chọn B

Mặt phẳng (P) là giao tuyến của hai mặt cầu (S_1) và (S_2) nên ta có hệ:

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=4\\ x^2+y^2+z^2-2x-6z+7=0\end{cases}\Rightarrow 2y=0\Rightarrow (P)\equiv(Ozx).$$

Gọi $C(0;0;0)$ và $D(3;0;5)$ lần lượt là hình chiếu của A và B lên (Ozx). Khi đó $AC=2$, $BD=4$, $CD=\sqrt{34}$.



Ta có: $AM+BN=\sqrt{AC^2+CM^2}+\sqrt{BD^2+DN^2}\geq\sqrt{(AC+BD)^2+(CM+DN)^2}$

Mặt khác: $CM+DN+MN\geq CD\Rightarrow CM+DN\geq\sqrt{34}-1$.

Suy ra $AM+BN\geq\sqrt{36+(CM+DN)^2}\geq\sqrt{36+\left(\sqrt{34}-1\right)^2}$

Vậy $AM+BN$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\sqrt{72-2\sqrt{34}}$, dấu "$=$" xảy ra khi C,M,N,D thẳng hàng.

Câu 50. Cho hàm số $f(x)=\left|x^3-(2m-5)x+2018\right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2019;2019]$ để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;3)$?

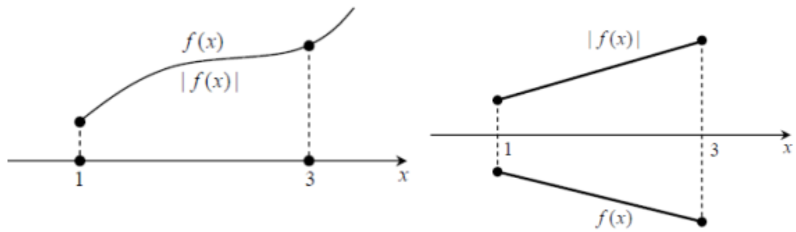
A. 3032. **B.** 4039. **C.** 0. **D.** 2021.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $f(x)=x^3-(2m-5)x+2018$, có đạo hàm $f(x)=3x^2-(2m-5)$.

Hàm số $y=|f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$ thì đồ thì của hàm số trong khoảng $(1;3)$ phải có hình dạng như sau:



Trường hợp 1: Hàm số $f(x)$ đồng biến trong khoảng $(1;3)$ và không âm trên $(1;3)$ tức là :

$$\begin{cases} f(1)\geq 0 \\ f'(x)\geq 0\forall x\in(1;3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m\leq 3x^2+5,\forall x\in(1;3) \\ 2024-2m\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\leq 4 \\ m\leq 1012 \end{cases} \Leftrightarrow m\leq 4.$$

Trường hợp 2: Hàm số $f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(1;3)$ và không dương trên $(1;3)$ tức là :

$$\begin{cases} f(1)\leq 0 \\ f'(x)\leq 0\forall x\in(1;3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m\geq 3x^2+5\forall x\in(1;3) \\ 2024-2m\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\geq 4 \\ m\geq 1012 \end{cases} \Leftrightarrow m\geq 1012.$$

Kết hợp với điều kiện ta được kết quả $m\in[-2019;4]\cup[1012;2019]$. Vây có 3032 giá trị của m.

-------HẾT---------